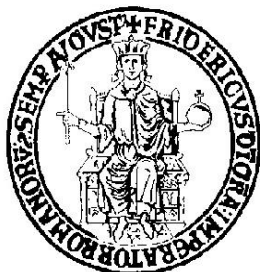


**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
FEDERICO II**



Facoltà di Ingegneria

**Dottorato di ricerca in Ingegneria dei Sistemi Idraulici, di
Trasporto e Territoriali XXIV ciclo.**

Candidato

Luigi Cimorelli

Tesi di dottorato:

**"Modellazione e progettazione ottimizzata delle reti di
drenaggio"**

Coordinatore di dottorato:

Prof. Ing. Guelfo Pulci Doria

Coordinatore di indirizzo:

Prof. Ing. Giacomo Rasulo

Relatore:

Prof. Ing. Domenico Pianese

Controrelatore:

Prof. Ing. Giuseppe Del Giudice

SOMMARIO

INTRODUZIONE	1
1 STATO DELL'ARTE.	4
1.1 STATO D'ARTE DELLA PROGETTAZIONE OTTIMALE DELLE RETI DI DRENAGGIO	5
1.2 INNOVAZIONI RISPETTO AI PRECEDENTI LAVORI PRESENTI IN LETTERATURA TECNICA	9
1.3 L'APPROCCIO PROPOSTO	10
2 METODI FINALIZZATI ALLA VALUTAZIONE DELLE MASSIME PORTATE AL COLMO DI PIENA E DEI MASSIMI ISTANTANEI DEI TIRANTI IDRICI.....	12
2.1 APPROCCI UTILIZZABILI PER L'IDIVIDUAZIONE DELLE MASSIME PORTATE E DEI MASSIMI TIRANTI IDRICI CORRISPONDENTI A PREASSEGNA TI VALORI DEL PERIODO DI RITORNO.	13
2.2 DESCRIZIONE DEL MODULO IDROLOGICO-IDRAULICO UTILIZZATO PER LA VALUTAZIONE DELLE MASSIME PORTATE AL COLMO DI PIENA E DEI MASSIMI TIRANTI IDRICI ISTANTANEI. ...	19
3 MODELLI MATEMATICI PER LA PROPAGAZIONE MONODIMENSIONALE DELLE PIENE, NELLE CORRENTI A PELO LIBERO.....	23
3.1 DERIVAZIONE DELLE EQUAZIONI DEL MOTO VARIO MONODIMENSIONALE	23
3.2 CLASSIFICAZIONE DEI MODELLI DERIVABILI DAL SISTEMA COMPLETO DELLE EQUAZIONI DEL MOTO.	29
3.3 L'ONDA CINEMATICA.	30
3.4 L'ONDA DIFFUSIVA (MODELLO PARABOLICO).	32
3.5 LA LINEARIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI DEL MOTO E I MODELLI LINEARIZZATI.....	39
3.6 SOLUZIONE ANALITICA PER L'EQUAZIONE DELL'ONDA DINAMICA LINEARIZZATA.....	43
3.7 SOLUZIONE ANALITICA DELL'EQUAZIONE PARABOLICA LINEARIZZATA.	47
3.8 SOLUZIONE ANALITICA PER L'EQUAZIONE DELL'ONDA PARABOLICA LINEARIZZATA IN PRESENZA DI AFFLUSSI LATERALI.	52
3.9 SOLUZIONE ANALITICA PER L'EQUAZIONE DELL'ONDA CINEMATICA LINEARIZZATA.....	54
4 METODI RISOLUTIVI PER I MODELLI DI PROPAGAZIONE DELLE PIENE NEI CANALI A PELO LIBERO.	56
4.1 IL METODO ALLE DIFFERENZE FINITE PER IL SISTEMA COMPLETO.....	57
4.2 IL METODO ALLE DIFFERENZE FINITE PER IL MODELLO CINEMATICO.....	60
4.3 IL METODO AI VOLUMI FINITI (FVM).	62
4.4 LO SCHEMA CPM (COMPLETE PARABOLIC MODEL).	64
4.5 LO SCHEMA CPM CON AFFLUSSI LATERALI.	69

4.6 VALUTAZIONE DELL' INTEGRALE DI CONVOLUZIONE DELLA RISPOSTA ALL'IMPULSO RETTANGOLARE DEL CPM.	71
4.7 VALUTAZIONE DELL' INTEGRALE DI CONVOLUZIONE DELLA RISPOSTA ALL'IMPULSO RETTANGOLARE PER GLI AFFLUSSI LATERALI.....	78
4.8 IL METODO MIXED FLOW PER IL CPM.....	82
5 ALGORITMI GENETICI.....	87
5.1 GLI ALGORITMI GENETICI	88
5.2 ELEMENTI CHIAVE	89
5.3 L'INDIVIDUO	89
5.4 IL GENE	91
5.5 LA CODIFICA	91
5.6 LA POPOLAZIONE	92
5.7 LA FITNESS.....	93
5.8 FITNESS UTILIZZATA PER LE RETI DI DRENAGGIO RURALI.....	93
5.9 FITNESS UTILIZZATA PER LE RETI URBANE DI DRENAGGIO.....	96
5.10 LA SELEZIONE	100
5.10.1 Roulette Wheel Selection.....	101
5.10.2 Rank Selection	102
5.10.3 Tournament Selection.....	102
5.11 IL CROSSOVER.....	103
5.11.1 Single-point Crossover	103
5.11.2 Two-point Crossover	104
5.11.3 Uniform Crossover	105
5.12 MUTAZIONE	106
5.13 IL RICAMBIO GENERAZIONALE (GENERATIONAL REPLACEMENT ED ELITISMO)	108
5.14 BASI TEORICHE DEI GA: IL CONCETTO DI "SCHEMATA", L'IPOTESI DEI "BUILDING BLOCKS" E LO "SCHEMA THEOREM".....	109
5.15 L'ALGORITMO PROPOSTO	112
6 TEST ED APPLICAZIONI.....	114
6.1 TEST 1 LPM: MOTO VARIO SUL SINGOLO CANALE A DEBOLE PENDENZA (RAFFRONTATO CON UN MODELLO COMPLETO E CON DATI SPERIMENTALI).	114
6.2 TEST 1 LPM: MOTO VARIO SU SINGOLO CANALE A PENDENZA VARIABILE (CAPACITA' DI PORTARE IN CONTO I RISALTI IDRAULICI).	118
6.3 TEST 3 LPM: VERIFICA STABILITA' LPM.	120
6.4 TEST 4 LPM: SIMULAZIONE CORRENTI IN PRESSIONE (CORRENTI STAZIONARIE)	124

6.5 TEST 5 CPM: CAPACITA' DI SIMULARE LA TRANSIZIONE DA CORRENTE A SUPERFICIE LIBERA A CORRENTE IN PRESSIONE ALL'INTERNO DEL PROCESSO DI MOTO VARIO	127
6.6 TEST 1 EGA: RETE MAYS & YEN (1975).....	129
6.7 TEST 2 GA: WORLD BANK SEWER (1991)	132
6.8 CASO DI STUDIO PER LE RETI DI BONIFICA.....	135
6.10 APPLICAZIONE 2: OTTIMIZZAZIONE MEDIANTE IL METODO DELL'INVASO ITALIANO (DOA-ISM)	138
6.11 APPLICAZIONE 3: OTTIMIZZAZIONE MEDIANTE IL MODELLO CINEMATICO COMPLETO (DOA-CKM).	140
6.12 APPLICAZIONE 4: OTTIMIZZAZIONE MEDIANTE IL MODELLO CPM (DOA-CPM).....	142
6.13 CONFRONTI TRA I RISULTATI OTTENUTI CON I VARI APPROCCI E CONSIDERAZIONI.	143
CONCLUSIONI	150
BIBLIOGRAFIA.....	153

INTRODUZIONE

Le risorse economiche necessarie per la realizzazione di nuove infrastrutture a rete, quali fognature, acquedotti e reti di bonifica, un tempo cospicue (in virtù, soprattutto, dei notevoli finanziamenti erogati, al Nord, dalla Cassa Depositi e Prestiti e, al Sud, dalla Cassa per il Mezzogiorno), risultano, già oggi, alquanto più ridotte rispetto ad alcune decine di anni fa, e, verosimilmente, tenderanno, nel prossimo futuro, sempre più a ridursi, soprattutto nel Mezzogiorno d'Italia, in conseguenza del previsto azzeramento, a partire dall'anno 2013, dei trasferimenti sin qui effettuati, da parte della Comunità Europea, alle regioni più disagiate tra quelle ricadenti sotto la propria giurisdizione.

Un problema si pone anche in relazione all'uso razionale degli ingenti trasferimenti di risorse economiche previsti, da parte della Comunità Europea, ad alcuni dei propri Stati membri, per i quali è previsto, nel prossimo triennio, per la sola realizzazione o adeguamento di infrastrutture fognarie, l'investimento di una quindicina di miliardi di euro.

Si pone, pertanto, sempre più, l'esigenza di progettare reti di drenaggio che, oltre a garantire la piena affidabilità rispetto alle usuali esigenze (ad esempio: rispetto delle velocità minime atte a garantire una ridotta sedimentazione dei materiali e delle sostanze trascinate dalla corrente; rispetto delle velocità massime, contenimento dei tiranti idrici, ecc.), presentino, nel contempo, anche un contenuto costo di costruzione e di gestione.

In passato, per il dimensionamento ottimale delle reti di drenaggio, sono stati già proposti numerosi metodi, che si differenziano per il tipo di algoritmo di ottimizzazione utilizzato e/o per i vincoli posti alla base del problema. Per di più, nei vari lavori disponibili in letteratura, non si pone mai l'accento sul problema delle modalità con cui valutare le portate rispetto alle quali effettuare il dimensionamento ottimale del sistema.

In effetti, dall'analisi della vasta letteratura tecnica esistente sull'argomento, è emerso che la progettazione ottimale dei sistemi di drenaggio, urbani e non, è quasi sempre effettuata utilizzando portate costanti o, al limite, un idrogramma di piena già noto a

priori. Pochissimi sono, invece, i casi in cui la valutazione delle portate in arrivo nei vari tratti della rete di drenaggio viene effettuata con l'ausilio di modelli idrologici.

Inoltre, i modelli idraulici utilizzati in letteratura sono quasi sempre basati sull'*onda cinematica*: addirittura, nei casi più semplici, di portate costanti, la modellistica idraulica è ridotta alla semplice applicazione di formule di moto stazionario ed uniforme. In tutte e due i casi, gli approcci utilizzati non risultano assolutamente in grado di portare in conto problemi, invero molto frequenti nelle reti di drenaggio, derivanti da eventuali rigurgiti da valle e/o dalle interferenze tra le correnti che pervengono, a partire da diversi tronchi, in uno stesso nodo di confluenza. Per altro gli stessi approcci non sono assolutamente in grado di portare in conto sia la formazione l'eventuale spostamento di risalti idraulici né, tantomeno, l'eventuale entrata in pressione di condotti a cielo chiuso (come utilizzati nelle fognature urbane).

Nel presente lavoro di tesi viene, pertanto, presentato un nuovo tipo di approccio per la progettazione delle reti di drenaggio, siano esse urbane o rurali, caratterizzate dal deflusso di portate variabili sia nel tempo che nello spazio.

L'approccio proposto è di tipo probabilistico, in quanto valuta le portate al colmo di piena che affluiscono a specifiche sezioni di riferimento, debitamente posizionate lungo i vari tronchi della rete, a partire da piogge di assegnato periodo di ritorno; inoltre, l'approccio presentato è, nel contempo, sia idrologicamente che idraulicamente basato, in quanto è in grado di sfruttare un qualsiasi modello semi-distribuito, nell'ambito del quale può essere fatto uso di un qualsiasi modello idraulico per la modellazione delle modalità con cui si verifica la propagazione delle piene.

Infine, l'approccio proposto è in grado di superare tutte le difficoltà insite nella preventiva individuazione di uno "*ietogramma di progetto*", in quanto si avvale di un approccio variazionale o 'estremante' (Della Morte et al., 2000; Della Morte et al., 2001; Covelli et al., 2008; [a] Cimorelli et al., 2009).

L'algoritmo di ottimizzazione utilizzato è basato sui ben noti *Algoritmi Genetici* (Holland 1975, Godberg 1989), che già in passato hanno mostrato una grande versatilità d'uso.

Nel lavoro svolto, si è voluto fornire un modello idraulico di propagazione delle piene che, seppure "semplificato" rispetto ai modelli di moto vario completo, fosse, da un lato, in grado di descrivere i vari fenomeni che si realizzano durante il passaggio di un onda di piena (rigurgiti da valle, regimi di corrente mista – "veloce/lenta" o "lenta-veloce", presenza di uno o più risalti idraulici lungo il percorso, possibilità di trattare il

passaggio da moto a superficie libera a moto in pressione nelle fognature, propagazione di perturbazioni negative verso monte dovute alla presenza di idrovore, ecc.); dall'altro, di facile e pratico utilizzo anche in campo tecnico, in modo da consentirne la divulgazione e un rapido estendimento in campo tecnico.

Di conseguenza, il presente lavoro di Tesi è stato articolato come segue:

Nel primo capitolo è fornita una descrizione dettagliata dello *stato dell'arte* riguardante la progettazione ottimale delle reti di drenaggio. Nel secondo capitolo è descritto l'approccio utilizzato per la determinazione delle massime portate istantanee al colmo e dei massimi tiranti istantanei rispetto ai quali effettuare la progettazione ottimizzata della rete. Nel terzo capitolo è fornita una panoramica dei modelli di propagazione delle onde di piena, partendo dalle equazioni del *de Saint-Venant* per poi ricavare tutti gli altri modelli che da esse derivano. Nel quarto capitolo, sono descritti i metodi per la risoluzione dei modelli di propagazione delle onde di piena presi in considerazione nell'ambito del presente lavoro, ed è sviluppato un modello semplificato, rispetto alle equazioni complete, di facile utilizzo e di basso costo computazionale. Nel quinto capitolo è fornita una descrizione dettagliata sul funzionamento, ai fini dell'ottimizzazione, degli *algoritmi genetici*, con riferimento agli operatori genetici utilizzati nell'algoritmo proposto. Infine, nel sesto capitolo, sono esposti sia i risultati dei test effettuati sui modelli di propagazione e sull'algoritmo di ottimizzazione, che i risultati ottenuti dall'applicazione della procedura proposta ad un determinato caso di studio. A tale scopo, all'interno della procedura di ottimizzazione, si sono utilizzati modelli idraulici caratterizzati da diversi livelli di semplificazione della realtà fenomenologica. In tal modo, è stato possibile mostrare come, nell'ottica di effettuare una corretta progettazione ottimizzata delle reti di drenaggio, i modelli di propagazione più realistici sono da preferire ai modelli eccessivamente semplificati, basati su ipotesi di moto localmente ed istantaneamente uniforme, generalmente utilizzati nella pratica tecnica.

1 STATO DELL'ARTE.

Nell'ambito del presente lavoro di tesi, si propone un nuovo tipo di approccio per la progettazione ottimizzata sia delle reti urbane (reti di fognatura) che rurali (reti di bonifica) di drenaggio. La metodologia proposta è basata sulla ricerca del più idoneo set di variabili di controllo caratteristiche delle reti (ovvero dei diametri e delle pendenze longitudinali nel caso delle reti fognarie, delle larghezze di base e delle pendenze longitudinali nel caso delle reti di bonifica), per ciascun tronco della rete di drenaggio, al fine di minimizzare il costo di realizzazione e di gestione della rete, compatibilmente con l'esigenza di garantire il rispetto di predeterminati vincoli (quali: quelli sul massimo grado di riempimento e sulla velocità massima di deflusso in tempo di pioggia; quello sulla velocità minima di deflusso in periodo di tempo asciutto; quelli sulle profondità massime di scavo delle trincee di posa e sulle altezze minime di ricoprimento delle condotte fognarie; quelli sul non superamento della velocità limite oltre la quale si innescano fenomeni erosivi per le reti di bonifica; vincoli sul franco di buona coltivazione per le reti di bonifica). La tecnica di ottimizzazione utilizzata è basata sugli Algoritmi Genetici (*Holland*, 1975, *Goldberg* 1989). Nell'ambito di tale algoritmo (che, come noto, sottopone iterativamente a valutazione N_r possibili configurazioni della rete (con N_{iter} iterazioni), ciascuna delle quali caratterizzate da N_l coppie di valori (diametro del collettore pendenza di fondo, oppure larghezza di base e pendenza di fondo), essendo N_l il numero di canali costituenti la rete stessa), si fa riferimento al caso, invero molto frequente in campo tecnico, di reti fognarie del tipo “misto”, a sistema di smaltimento “unitario”. Nell'ambito di ciascuna delle $N_{iter} \times N_r$ configurazioni della rete complessivamente analizzate viene utilizzato, per fissato valore del periodo di ritorno, un approccio variazionale che consente, per ogni durata, di individuare, grazie ad un modello idrologico semi-distribuito in cui le portate di afflusso meteorico efficace, in arrivo ai vari elementi della rete, sono poi propagate con l'ausilio di un simulatore idraulico semplificato di moto vario, i massimi istantanei delle portate al colmo di piena e dei tiranti idrici, e, al variare della durata, i massimi tiranti idrici e le massime portate istantanee corrispondenti al periodo di ritorno fissato.

1.1 STATO D'ARTE DELLA PROGETTAZIONE OTTIMALE DELLE RETI DI DRENAGGIO

Negli ultimi anni, per la progettazione ottimale delle reti di drenaggio, sono state proposte e sviluppate diverse metodologie, basate su procedure di ottimizzazione che, per la ricerca del minimo della Funzione Obiettivo, possono oggi avvalersi delle elevate capacità di calcolo offerte dai moderni calcolatori.

Più in particolare, gli approcci di ottimizzazione disponibili in letteratura possono essere divisi, essenzialmente, in due gruppi: Algoritmi Esatti (*Exact Optimization*, “EO”) e/o Algoritmi Euristici (*Heuristical Optimization*, “HO”). Gli algoritmi esatti comprendono, a loro volta, i metodi di Programmazione non Lineare (*Dynamic Programming methods*) che sono i primi e, come dimostrato da tutta una serie di applicazioni fatte da vari autori (*Robinson e Labadie*, 1981; *Li e Matthew*, 1990; *Yeh e Labadie*, 1997), i più usati per le reti, e i metodi di Programmazione Lineare (*Linear Programming*), utilizzati da *Elimam et al.* (1989). Questi ultimi, seppure molto efficienti da un punto di vista strettamente computazionale, durante le fasi di ricerca dell'ottimo globale rimangono, spesso, intrappolati nei cosiddetti “punti di minimo locale”, per cui, poi, non riescono, di fatto, a convergere alla soluzione ottimale. Tra i metodi euristici che possono essere applicati nell'ambito di un problema di “optimal design” di una rete fognaria, quelli più usati, sia per la loro semplicità, sia per la loro capacità di conseguire buoni risultati, sono gli Algoritmi Evolutivi (*Evolution Algorithms*, “EA”) e, nell'ambito di tale tipologia, i cosiddetti Algoritmi Genetici (*Genetic Algorithms*, “GA”), che, via via, hanno suscitato sempre più attenzione da parte della comunità tecnico-scientifica, in quanto sono molto robusti e non richiedono particolari limitazioni sul comportamento della Funzione Obiettivo (*Goldberg*, 1989; *Simpson et al.*, 1994; *Savic e Walters*, 1997; *Halhal et al.*, 1997; *Dandy et al.*, 2001; *Afshar*, 2006; *Covelli et al.*, 2007).

In letteratura tecnica, l'ottimizzazione delle reti di drenaggio (urbane o rurali) è stata trattata da vari autori con differenti approcci al problema. Nel seguito sono riportati i lavori più significativi in tale ambito distinguendo separatamente il caso delle reti di drenaggio urbane (reti di fognatura) da quello delle reti di drenaggio rurali (reti di bonifica), nonostante le problematiche legate a tale argomento differiscono solo per i vincoli del problema. Tale distinzione viene effettuata in quanto, per queste due

tipologie di infrastrutture idrauliche, gli stati di avanzamento della ricerca sono a due livelli abbastanza differenti.

Reti di fognatura:

La progettazione ottimale delle reti di fognatura è stata trattata, in letteratura tecnica, dai primi anni settanta. Gli approcci proposti differiscono principalmente per:

1. Per il tipo di algoritmo di ottimizzazione impiegato: Programmazione Lineare (*Deininger 1970, Dajani & Gemmell 1971*), *Geometric Programming* (*Wilson et al. 1974*), *Programmazione Dinamica* (*Wilson et al. 1974, Mays & Yen 1975, Tang et al. 1975, Mays et al. 1976, Walters & Templeman 1979*), *Spreadsheet method* (*Miles & Heaney 1988*); *Algoritmi Genetici* (*Liang et al. 2000, Peng & Jia 2004, Afshar et al. 2006*), *Algoritmi Genetici Combinati con la Programmazione Quadratica* (*Pan & Kao 2009*), *Ant Colony Optimization* (*Afshar 2006, Afshar 2007, Afshar 2010*), *Particle Swarm Optimization* (*Izquierdo et al. 2008*);
2. Per la tipologia dei vincoli considerate all'interno della procedura di ottimizzazione (velocità massime e/o minime, massimo grado di riempimento, grado minimo di ricoprimento, profondità massima di scavo, massima/minima pendenza longitudinale, ecc.);
3. Per la scelta delle variabili decisionali (pendenze longitudinali, quote di scavo, ecc.) in aggiunta ad assegnate dimensioni delle sezioni, dipendenti dalla forma dello speco (per esempio, il diametro D per canali circolari, l'altezza interna IH negli altri casi di condotti chiusi);
4. Per il tipo di funzione obiettivo considerata nella procedura di ottimizzazione, relativa ai costi di costruzione e gestione (per gli algoritmi genetici è detta Funzione Di Fitness, ed è costituita dalla somma della funzione obbiettivo, relativa ai costi appena menzionati, e una funzione di penalità introdotta al fine di garantire il rispetto dei vincoli del problema);
5. Per il tipo di modello idraulico utilizzato per la valutazione delle prestazioni della rete;
6. Per il metodo adottato per valutare le piogge di progetto (uso di una singolo pluviogramma di progetto come nel *Chicaco Storm Model*; applicazione di una tecnica di generazione di eventi di pioggia tipo *Barlett-Lewis* o la *Stochastic Point Process* di Neyman-Scott (*Rodriguez Iturbe 1987, Cowpertwait 1995*);

Uso di una relazione Intensità-Durata-Periodo di ritorno nell'ambito di un approccio variazionale ecc.).

7. per il modello di afflussi-deflussi e / o i sottomodelli scelti per la simulazione dei deflussi superficiali e la valutazione del tempo di ritardo impiegato dalle portate per raggiungere i diversi tratti della rete.

Nei primi articoli sulla progettazione ottimale di reti di drenaggio, è stato fatto uso della Programmazione Lineare (*Deininger, 1970; Dajani & Gemmell 1971*), tuttavia, i modelli basati su questa tecnica richiedono la linearità delle funzioni di costo, o, comunque, possono essere impiegate a valle della linearizzazione delle funzioni di costo. Successivamente, è stata impiegata ampiamente la Programmazione Dinamica (*Wilson et al. 1974, Mays e Yen 1975, Tang et al. 1975, Walters e Templeman 1979*). Questa tecnica, anche se è in grado di trovare il minimo globale (o massimo) della funzione obiettivo, non può essere impiegata, su larga scala, per sistemi fognari complessi e realistici in quanto richiede tempi di calcolo eccessivamente elevati. Utilizzando la Programmazione Dinamica Differenziale Discreta (DDDP) (*Mays & Yen 1975, Tang et al 1975, Mays & Wenzel 1976, Mays et al 1976, Li & Mathew 1990.*), sono stati ottenuti alcuni miglioramenti, però, questo approccio, limita lo spazio di ricerca e, di conseguenza, riduce il numero di soluzioni candidate all' ottimo globale. Gli algoritmi genetici (GA) sono sempre più impiegati per la soluzione dei problemi di progettazione ottimizzata in diverse applicazioni di idraulica tecnica. In particolare, sono stati impiegati con successo per la progettazione ottimale di reti di tubazioni (*Savic e Walters 1997, Covelli et al. 2007*), per il posizionamento ottimale dei sensori all'interno di reti di distribuzione dell'acqua, per il monitoraggio della qualità (*Cozzolino et al. 2011*), l'allocazione ottimale e regolazione delle valvole di riduzione della pressione per ridurre al minimo le perdite d'acqua (*Covelli et al. 2011*) e per la progettazione di sistemi fognari (*Liang et al. 2000, Jia Peng e il 2004, Afshar et al. 2006*). Per questo motivo, nel presente lavoro, si è deciso di impiegare gli algoritmi genetici, al fine di ottenere, in ogni applicazione, configurazioni di rete caratterizzate da valori minimi della funzione di fitness (FF), tenendo conto, allo stesso tempo, dei costi di costruzione della rete e dei costi supplementari (monetari e / o penalizzazioni sociali) relativi al soddisfacimento dei vincoli dei problemi considerati.

Reti di Bonifica:

In letteratura tecnica, si ritrovano numerose procedure per il dimensionamento ottimizzato delle sezioni di un singolo canale, sia che queste abbiano forma trapezoidale o che abbiano contorni descrivibili da leggi di potenza: in particolare, gli approcci proposti ricorrono o a procedure analitiche (*Guo & Hughes, 1984; Loganathan, 1991*) oppure ai classici metodi per l'ottimizzazione dei sistemi non lineari, come il metodo dei moltiplicatori di *Lagrange* (*Froehlich, 1994; Monadjemi, 1994; Das, 2000; Anwar & Clarke, 2005; Das, 2007*). In questi lavori vengono considerate, di volta in volta, diverse espressioni per la funzione obiettivo e per i vincoli del problema. Con lo sviluppo di calcolatori sempre più potenti e a buon mercato, negli ultimi anni, anche per le reti di bonifica, si sono iniziate a sviluppare delle procedure di dimensionamento ottimizzato basate sull'uso degli *Algoritmi Genetici* (GA): il primo lavoro in tal senso è stato proposto da *Jain et al. (2004)*. In questo lavoro, gli autori, usufruendo di algoritmi genetici, hanno definito una procedura per la progettazione ottimale di sezioni trapezoidali e triangolari: la metodologia proposta individua, in particolare, la soluzione ottimale come quella che minimizza i costi di scavo e di rivestimento, nelle ipotesi di limitare i valori della larghezza in superficie e delle pendenze delle sponde della sezione e definendo le massime velocità ammissibili con riferimento alla tipologia di rivestimento considerato. Lavori successivi portano in conto, nella procedura di ottimizzazione mediante algoritmi genetici, o un fattore di sicurezza rispetto alla stabilità delle sponde nei confronti di fenomeni di scivolamento (*Bhattachariya & Satish, 2007*), oppure il franco di sicurezza rispetto all'esondazione, valutato con riferimento a preassegnati valori della probabilità con cui tale fenomeno può verificarsi (*Das, 2007, Bhattachariya & Satish, 2008*). Tuttavia, in tutti questi lavori, l'attenzione è rivolta all'ottimizzazione della sezione di un singolo canale, prescindendo dalla rete nel suo complesso. Inoltre, nei lavori citati, per la parte idraulica, si fa riferimento a condizioni di moto uniforme: difatti, frequentemente, uno dei vincoli del sistema di equazioni e disequazioni da soddisfare è l'equazione di *Manning* (*Guo & Hughes, 1984; Anwar & Clarke, 2005; Das, 2007; Bhattachariya & Satish, 2008*).

1.2 INNOVAZIONI RISPETTO AI PRECEDENTI LAVORI PRESENTI IN LETTERATURA TECNICA

Nei lavori fin ora proposti in letteratura tecnica, in tema di optimal-design delle reti di drenaggio mediante algoritmi genetici, come mostrato nel precedente paragrafo, le portate di progetto vengono trattate o come dati noti del problema e tenute costanti, oppure vengono determinate con l'impiego di idrogrammi di piena già noti (*Afshar*, 2006). Di conseguenza, l'ottimizzazione, viene effettuata senza considerare tutte le difficoltà insite nella preventiva individuazione dei vari "ietogrammi di progetto", ovvero non viene affrontato il problema dell'individuazione delle piogge di progetto e delle relative durate, che massimizzano le portate nelle varie sezioni di controllo della rete. Inoltre il calcolo della rete, viene condotto sempre in ipotesi di moto uniforme, utilizzando o il modello dell'*Onda Cinematica*, o, nel caso di portate costanti, utilizzando solo formule di moto uniforme, come nella maggior parte dei lavori presenti in letteratura. Quindi nessuno dei lavori presenti in letteratura tecnica, tiene conto, in ambito di *optimal-design* delle reti di drenaggio, del problema dei tiranti rigurgitati da valle nei vari tratti della rete. Inoltre, nel caso specifico delle reti di bonifica, l'ottimizzazione è stata effettuata sempre in riferimento al singolo canale e mai tenendo conto della rete in tutta la sua complessità.

Nel presente lavoro di Tesi, si propone un algoritmo di ottimizzazione, basato sull'utilizzo degli algoritmi genetici, nel quale, ai fini della determinazione dei massimi tiranti idrici e delle massime portate al colmo di piena, si intende utilizzare un approccio variazionale, che ricorre, per la stima dei massimi istantanei dei tiranti idrici e delle portate defluenti nei diversi punti della rete, ad un modello idrologico semi-distribuito accoppiato a un modello idraulico di moto vario, in grado di portare in conto tutti i fenomeni connessi alla propagazione delle piene, che si sviluppano all'interno di reti di drenaggio anche particolarmente complesse ed estese. In particolare si è fatto riferimento a modelli idraulici, con livelli di semplificazione della realtà fenomenologica, via via decrescenti (metodo dell'invaso, modello dell'onda cinematica completa e modello parabolico linearizzato). In tal modo si è potuto avere un quadro completo dei limiti legati all'utilizzo di modelli basati sul moto uniforme, che ancora sono i modelli più utilizzati nella progettazione delle reti di drenaggio.

1.3 L'APPROCCIO PROPOSTO

Nel presente lavoro, si è fatto uso di un approccio che prevede l'accoppiamento di un modello semi-distribuito, idrologico-idraulico all'interno di una procedura variazionale o "estremante" (specificamente finalizzata alla determinazione delle portate al colmo di piena e, quindi, delle caratteristiche idrauliche in determinate sezioni dei tratti costituenti la rete), ad un algoritmo di ottimizzazione. Per quanto concerne il solutore idraulico, si è deciso di utilizzare tre modelli semplificati:

- Il noto *metodo dell'invaso italiano* (Supino, 1965);
- Il modello dell'*Onda Cinematica Completa*, risolto con una tecnica alle differenze finite;
- Il *Modello Parabolico Linearizzato* (CPM).

La possibilità di utilizzare un modello idraulico completo è stata scartata per il fatto che un'ottimizzazione eseguita con l'ausilio di un modello idraulico completo, risolto con le tecniche numeriche attualmente a disposizione, richiederebbe tempi di calcolo eccessivi. Inoltre il modello CPM è in grado di fornire risultati molto accurati, in termini di tiranti e portate, con tempi di calcolo molto più ridotti.

Il metodo dell'invaso italiano e dell'onda cinematica, sono stati impiegati in quanto rappresentano, ancora oggi, i modelli più utilizzati per la progettazione delle fognature, e quindi è stato possibile trarre importanti conclusioni dal confronto dei risultati ottenuti, impiegando i diversi modelli, a valle del processo di ottimizzazione. L'utilizzo congiunto di tali modelli idraulici a modelli idrologici semi-distribuiti, all'interno di un approccio variazionale, consente di determinare le condizioni più sfavorevoli, nelle sezioni più significative della rete, in termini di tiranti e portate, rispetto alle quali effettuare il dimensionamento ottimale della rete.

Per quanto riguarda l'algoritmo di ottimizzazione, si è deciso di far uso degli ormai noti *Algoritmi Genetici* (GA). I quali consentono di pervenire a risultati soddisfacenti, senza richiedere la convessità delle funzioni di costo e che dello spazio delle soluzioni delimitato dai vincoli del problema.

Dunque la procedura di ottimizzazione proposta può essere sintetizzata nei seguenti punti:

1. Generare, in maniera casuale, un insieme costituito da un certo numero di possibili soluzioni;

2. Utilizzare, per ogni singola soluzione, il modulo idrologico-idraulico al fine di determinare le condizioni idrauliche più sfavorevoli (velocità massime, velocità minime, tiranti massimi, portate massime ecc.) rispetto alle quali effettuare il dimensionamento ;
3. Valutare le funzioni di costo e verificare il rispetto dei vincoli imposti al problema (nell'ambito dei GA tale punto coincide con la valutazione della funzione di "*Fitness*")
4. Evolvere, mediante gli operatori del GA (*selezione, crossover, mutazione ed elitismo*), le soluzioni di partenza al fine di determinare un nuovo insieme di soluzioni;
5. Ripetere il processo, a partire dal punto 2, fino a convergenza.

2 METODI FINALIZZATI ALLA VALUTAZIONE DELLE MASSIME PORTATE AL COLMO DI PIENA E DEI MASSIMI ISTANTANEI DEI TIRANTI IDRICI.

Per poter effettuare in maniera corretta il dimensionamento di una rete di drenaggio, facendo ricorso ad un opportuno algoritmo di ottimizzazione, è necessario avere a disposizione un metodo per la corretta valutazione delle portate al colmo di piena e dei massimi tiranti idrici, da poter utilizzare all'interno della procedura di ottimizzazione.

La valutazione dei massimi delle portate al colmo e dei massimi tiranti idrici, che possono realizzarsi lungo i diversi tronchi di una rete di drenaggio, sia essa naturale o artificiale, può essere effettuata, come è noto, avvalendosi di modelli idrologici (a parametri concentrati, distribuiti o semi-distribuiti), accoppiati a modelli idraulici (a loro volta caratterizzati da livelli più o meno elevati di semplificazione della realtà fenomenologica). La casistica presente in letteratura tecnica è talmente ampia che, su tale argomento, potrebbero senz'altro essere scritti interi trattati senza che lo stesso possa considerarsi veramente esaurito: in pratica, si passa da approcci semplicissimi, in cui, facendo riferimento a modelli idrologici semplificati (possibilmente concettuali, a parametri concentrati, e caratterizzati da uno o due parametri di chiaro significato fisico), si valuta dapprima la portata al colmo (corrispondente ad un assegnato pluviogramma o ad un assegnato periodo di ritorno) che può affluire ad una prefissata sezione del corso d'acqua o della rete di drenaggio di interesse, e poi, con l'ausilio di modelli idraulici molto semplici (costituiti, ad esempio, anche da una classica formula di moto uniforme e stazionario), viene effettuata la valutazione dei massimi tiranti idrici che possono realizzarsi nella sezione stessa, a casi estremamente più articolati e di maggiore complessità computazionale, in cui la valutazione delle portate al colmo di piena che possono affluire ad una determinata sezione viene, invece, effettuata avvalendosi di *modelli idrologici distribuiti*, in cui il bacino è preventivamente suddiviso in un elevato numero di celle (per ciascuna delle quali vengono introdotti uno o più parametri atti a descriverne il comportamento), mentre la valutazione dei tiranti idrici massimi viene attuata con l'ausilio di modelli di moto vario e non uniforme, eventualmente anche bidimensionali. Appaiono evidenti, da quanto sopra

indicato, le difficoltà che si incontrano nel risolvere il problema della verifica di una rete di drenaggio può incontrare. Difficoltà che possono essere superate ricorrendo ad approcci che, pur di complessità non troppo elevata dal punto di vista computazionale, siano in grado di fornire valori delle portate massime istantanee e, soprattutto, dei tiranti idrici massimi molto prossimi a quelli che potrebbero essere ottenuti solo grazie all'impiego di modelli molto più complicati e computazionalmente onerosi.

Tutto ciò premesso, nel presente lavoro, facendo seguito alle attività di ricerca già in corso di svolgimento, da circa una decina di anni, presso l'Università di Napoli Federico II, sul tema della modellazione dei processi idrologici ed idraulici che si sviluppano all'interno delle reti di drenaggio, si propone una procedura per la valutazione dei massimi tiranti idrici e delle massime portate istantanee osservabili, in conseguenza di eventi meteorici estremi, nei diversi tronchi di una rete di drenaggio. L'approccio proposto, basato sull'analisi dei risultati ottenuti, per due diverse reti di drenaggio (Biggiero & Pianese 1995, Covelli et al 2008, Cimorelli et al 2009), con l'ausilio di diversi modelli di calcolo all'uopo predisposti, consente di individuare, con buona precisione, non solo le portate massime che possono affluire a prefissate sezioni di interesse ubicate all'interno di reti comunque configurate, in corrispondenza di assegnati valori del periodo di ritorno, ma anche i tiranti idrici massimi che possono realizzarsi in conseguenza di fenomeni di rigurgito indotti dalle condizioni che si instaurano, a valle, in corrispondenza del recapito finale della rete.

2.1 APPROCCI UTILIZZABILI PER L'IDIVIDUAZIONE DELLE MASSIME PORTATE E DEI MASSIMI TIRANTI IDRICI CORRISPONDENTI A PREASSEGNA TI VALORI DEL PERIODO DI RITORNO.

Per la verifica di una rete di drenaggio è necessario, prima di tutto, simulare l'evento o gli eventi meteorici che genereranno le portate che si propagheranno all'interno della rete. Per quanto concerne questo aspetto, gli approcci che è possibile seguire sono riconducibili, sostanzialmente, a tre diverse tipologie. La prima, consiste nel far riferimento all'evento meteorico più gravoso, attraverso l'individuazione di un *pluviogramma di progetto* (come, ad esempio, il "Chicago Storm" proposto da *Keifer e Chu* nel 1957 con riferimento ad una particolare espressione della curva di probabilità pluviometrica ma facilmente adattabile a qualsivoglia espressione della curva stessa).

Una seconda strada è quella di generare, attraverso una tecnica del tipo *Montercarlo* accoppiata a modelli del tipo PRP-BL o PRP-NS (“*Poisson Rectangular Pulses*”, nella versione “*Bartlett-Lewis*” o, in alternativa, “*Neymann-Scott*”), di eventi meteorici equiprobabili, tali da riprodurre, contemporaneamente, la curva di probabilità pluviometrica relativa alla sottozona pluviometrica in cui ricade il bacino drenato dalla rete di interesse e il valore medio annuo dell’altezza di pioggia affluente al bacino stesso. Considerati T_r anni (con $r = 1, 2, \dots, N$, e $T_1 = T_2 = \dots = T_N$), ciascuno dei quali caratterizzato da k eventi (con k numero casuale distribuito in modo poissoniano), si può fissare l’ i -esimo anno (con $i = 1, 2, \dots, T_r$), passando poi a generare, anno per anno, i $k_{i,r}$ eventi meteorici da prendere a riferimento nelle successive analisi. Considerato il j -esimo evento meteorico dell’ i -esimo anno (con $j = 1, 2, \dots, k_{i,r}$), avvalendosi dello specifico modello di analisi preso a riferimento (che dovrà essere costituito, di fatto, da un modulo idrologico, destinato a simulare l’insieme dei fenomeni che si sviluppano al di fuori del reticolo, e da un modulo idraulico, a sua volta destinato a portare in conto i fenomeni che si sviluppano all’interno della rete), si potrà poi valutare, a partire da ciascuno di questi eventi, al variare del tempo, i valori massimi $Q_{s,i,j}$ e $h_{s,i,j}$ rispettivamente assunti, nel corso dell’evento, sia dalla portata affluente alla generica sezione s ubicata all’interno della rete (con $s = 1, 2, \dots, S$), sia del tirante idrico che si andrà a realizzare in corrispondenza della medesima sezione. A partire da tali valori, sarà quindi possibile valutare, per ciascuno dei T_r anni presi a riferimento, sia il massimo annuale della portata istantanea, $Q_{s,i}$, sia il massimo annuale del tirante idrico, $h_{s,i}$, sia il massimo $Q_{s,r}$ della portata istantanea nei T_r anni, sia, infine, il massimo $h_{s,r}$ del tirante idrico nei T_r anni, essendo:

$$Q_{s,r} = \max_{1 \leq i \leq T_r} Q_{s,i}$$

$$h_{s,r} = \max_{1 \leq i \leq T_r} h_{s,i}$$

Ripetuta N volte la procedura sopra descritta, si stimano i valori $Q_{s,T}$ e $h_{s,T}$ della portata massima istantanea e del tirante idrico massimo corrispondenti al periodo di ritorno T (con $T = T_1 = T_2 = \dots = T_N$) in base alla media aritmetica degli N valori di $Q_{s,r}$ e di $h_{s,r}$.

$$\hat{Q}_{s,T} = \frac{\sum_{r=1}^N Q_{s,r}}{N}$$

$$\widehat{h}_{s,T} = \frac{\sum_{r=1}^N h_{s,r}}{N}$$

Questo approccio, sicuramente utilizzabile sotto l'aspetto concettuale, e forse addirittura preferibile per la possibilità di poter portare in conto, esplicitamente, anche l'aleatorietà di altri parametri (quali, ad esempio, quelli legati alle condizioni di umidità iniziale delle superfici dei bacini sottesi dalla rete di canali, e/o quelli legati all'incertezza dei valori da assumere relativamente ai valori dei coefficienti di conducibilità idraulica dell'insieme condotti + pozzetti), risulta, nonostante l'attuale disponibilità, a basso costo, di strumenti di calcolo particolarmente potenti e veloci, ancora troppo oneroso dal punto di vista computazionale per poter essere utilizzato in campo tecnico.

Oltre ai due approcci appena descritti, è possibile considerare un terzo tipo di approccio, in grado di evitare sia l'uso di pluviogrammi di progetto che la generazione (e la successiva simulazione) di un numero estremamente elevato di eventi meteorici: l'approccio “*variazionale*” (o, come più recentemente denominato da alcuni autori, “*estremante*”), che è in grado di utilizzare al meglio la scarsa informazione fornita dalle curve di possibilità pluviometrica preventivamente individuate per una determinata area. Questa metodologia, seppure priva, fino a questo momento, di un fondamento teorico, risulta essere assolutamente idonea, in un'ottica ingegneristica, ad ottenere, con un limitato numero di simulazioni, sia il massimo annuale delle portate al colmo di piena che il massimo annuale del tirante idrico corrispondente ad un preassegnato valore del periodo di ritorno T . L'approccio estremante, di scuola italiana, risale a poco più di un secolo fa (*Fantoli*, 1904; *Puppini*, 1923), ma è stato reso suscettibile di una rapida utilizzazione in campo tecnico, ai fini del dimensionamento e della verifica di una rete di canali, solo successivamente (*Supino*, 1965), seppure in particolari ipotesi semplificatrici. La concreta possibilità di utilizzare un approccio variazionale, oltre che per la valutazione delle possibilità di laminazione offerte da invasi artificiali (*Pianese & Rossi*, 1986), anche per la valutazione dei massimi tiranti idrici e delle massime portate istantanee che si realizzano nelle reti di drenaggio a seguito di piene, è stata oggetto, negli ultimi anni, di numerose verifiche (*Della Morte et al.*, 2000; *Della Morte et al.*, 2001). Tali studi, condotti con riferimento alla propagazione di piene anche molto diverse per forma, durata e valore al picco della portata, hanno mostrato che l'errore che può essere commesso utilizzando, in luogo

degli idrogrammi di piena ipotizzati in ingresso in ciascun punto di una determinata rete, tanti idrogrammi di piena, di forma rettangolare ma caratterizzati, per ognuna delle durate considerate per l'applicazione della procedura *estremante*, dallo stesso volume massimo individuabile, per quella stessa durata, a partire dall'idrogramma ipotizzato in ingresso nello stesso punto, e massimizzando i risultati ottenuti al variare della durata, non supera, di norma, poche unità percentuali. I risultati di tali studi consentono, di fatto, di spostare l'attenzione degli studiosi: da un lato, sull'individuazione più accurata possibile delle curve di probabilità pluviometrica relative all'area di specifico interesse; dall'altro, sull'analisi delle modalità con cui, per ogni durata, la massima altezza di pioggia cumulata nella durata stessa si trasforma in massimo volume di piena potenzialmente affluente, in quella stessa durata, al bacino; infine, a partire da quest'ultimo, il valore del massimo volume di piena potenzialmente affluente, nella stessa durata, a ciascun elemento della rete. Come è noto, l'approccio variazionale permette, partendo dall'espressione della curva di probabilità pluviometrica relativa ad un assegnato valore del periodo di ritorno T , di ottenere, per tentativi (al variare della durata della precipitazione presa di volta in volta a riferimento e, quindi, del valore massimo, corrispondente al prefissato periodo di ritorno, dell'intensità media di pioggia nella durata stessa), la cosiddetta "durata critica", definita come quella per la quale si ha la massimizzazione della portata al colmo (o, rispettivamente, del tirante idrico). Questo approccio è, di norma, almeno nel nostro Paese, quello maggiormente utilizzato per il dimensionamento e/o la verifica delle rete di drenaggio.

Nell'ambito dell'approccio variazionale, si vengono a porre, ovviamente, numerose questioni: da un lato, avvalendosi di modelli di trasformazione delle piogge in piogge efficaci ai fini della formazione del ruscellamento superficiale, e di trasformazione di tali piogge in afflussi ai diversi elementi della rete, si ha la necessità di affrontare e risolvere diversi problemi di natura idrologica; dall'altro, avvalendosi di modelli idraulici a diversi livelli di semplificazione della realtà fenomenologica, si ha la necessità di simulare i complessi fenomeni di propagazione che si sviluppano all'interno della rete. Per ciò che concerne gli aspetti idraulici, è necessario, innanzi tutto, capire in che modo operare per modellare, in forma più o meno compiuta (o, viceversa, semplificata), i vari fenomeni che si sviluppano sia all'interno dei singoli tronchi che a livello di rete: propagazione lungo i singoli tronchi, eventualmente in

presenza di portate in ingresso più o meno uniformemente distribuite lungo il percorso, ed eventualmente con moto in pressione almeno in una parte del condotto; rigurgiti da valle, provocati dalle condizioni che si instaurano nel corpo idrico ricettore e/o all'interno della stessa rete; interferenza tra le correnti in arrivo dai diversi collettori, e poi confluenti in un nodo; eventuale propagazione su un fondo inizialmente asciutto; eventuale presenza di uno o più risalti, temporalmente localizzati in diverse sezioni della rete, ecc. Per un approfondimento dei modelli idraulici utilizzabili si rimanda ai capitoli 3, 4 e 6. In quest'ultimo capitolo si è mostrato, attraverso i test effettuati, come il *Modello Parabolico Linearizzato* (LPM) sia in grado di portare in conto tutti i fenomeni sopra descritti ed allo stesso tempo garantire una grande rapidità dei calcoli.

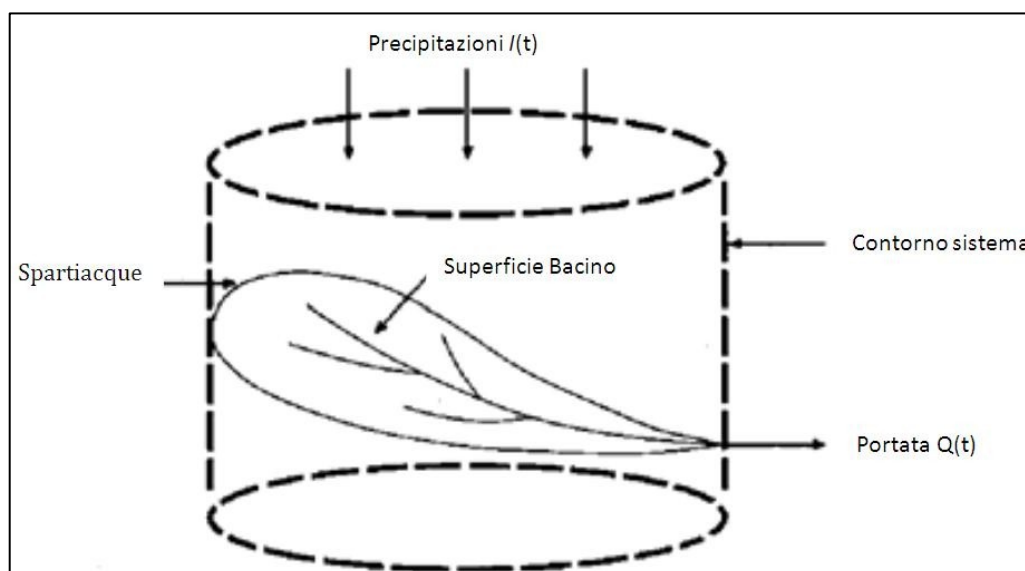


Fig.2.1 Schematizzazione dei modelli a parametri concentrati

Per quanto riguarda, invece, gli aspetti di tipo idrologico, i modelli cui si è soliti fare riferimento per descrivere i fenomeni che si sviluppano al di fuori della rete possono ricondursi, sostanzialmente, a tre diverse tipologie: modelli a parametri concentrati, modelli di tipo distribuito e modelli di tipo semi-distribuito. Nei modelli a parametri concentrati, il comportamento del bacino viene descritto da pochi parametri, che, nel caso di modelli concettuali, hanno anche un chiaro significato fisico.

Nei modelli distribuiti, il bacino viene invece suddiviso in una serie di celle elementari, per ciascuna delle quali si deve poi procedere ad assegnare le caratteristiche idrologiche, idrogeologiche ed idrauliche atte a permettere la valutazione del contributo che ciascuna cella fornisce alla formazione delle portate di piena nella preassegnata

sezione di chiusura del reticolo idrografico. Modelli di questo tipo, sicuramente molto accurati nella descrizione della realtà, hanno, però, lo svantaggio, da un lato, di essere spesso caratterizzati da un elevato onere computazionale, dovuto al numero molto elevato di informazioni da gestire e di processi da analizzare e dall'altro, da una sovra-parametrizzazione che, spesso, ne rende assolutamente problematica l'utilizzazione in campo tecnico, soprattutto nel caso di utenti inesperti.

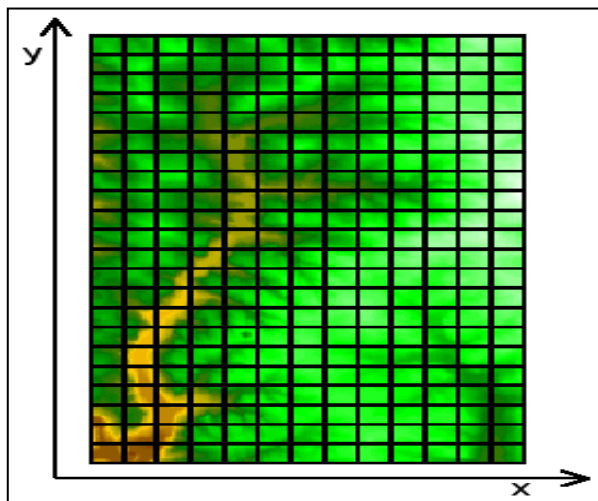


FIG.2.2 Schematizzazione del bacino nei modelli distribuiti.

Nei modelli di tipo semi-distribuito, infine, viene operata un'integrazione tra i due precedenti modelli, provvedendo a valutare (molto spesso, con l'ausilio di modelli concettuali a parametri concentrati) sia le portate di piena in arrivo dai singoli bacini drenati dalle aste di secondo o di terzo ordine che, con l'ausilio di modelli idraulici più o meno completi, i fenomeni che si sviluppano lungo l'asta principale od anche lungo le aste secondarie. I modelli semi-distribuiti appaiono, di fatto, quelli attualmente più forieri di risultati in campo applicativo, in quanto accoppiano la modellazione idrologica a quella idraulica, consentendo di portare in conto in maniera anche molto accurata la possibilità che, per cause naturali (quali varici, curve, tratti a sezione ristretta per cause morfologiche e geologiche, ecc.), oppure antropiche (vasche, ponti, traverse, restringimenti d'alveo, ecc.), le portate possano variare sostanzialmente lungo il percorso a causa di stoccaggio temporaneo o di esondazione.

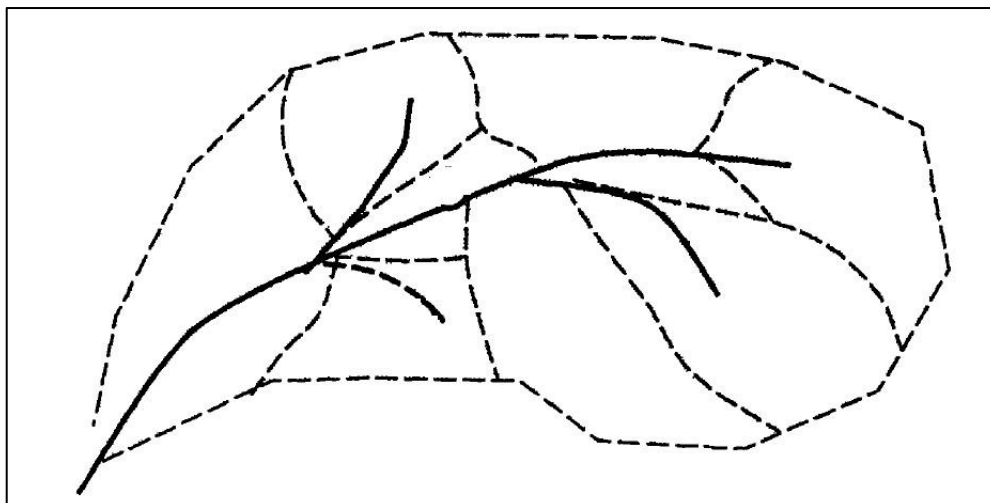


Fig.2.3 Schematizzazione del bacino nei modelli semi-distribuiti

I modelli semi-distribuiti frequentemente utilizzati per l'analisi del comportamento delle reti di drenaggio a seguito di eventi meteorici sono, ad esempio, lo SWMM (*Storm Water Management Model*, 1971) dell'EPA, il MOUSE (*MOdelling Of Urban SEwers*, 1994), ormai giunto alla release 2008, HydroWorks PM (*Wallingford Softwares*, 1995), InfoWorks CS (*Wallingford Softwares*, 1998), ILLUDAS (*ILLinois Urban Drainage Area Simulator*, Terstriep & Stall, 1974). Tali modelli consentono, in generale, analisi molto dettagliate delle condizioni di moto che si instaurano all'interno delle reti di drenaggio, ricorrendo, per le modellazioni di natura idrologica relative ai bacini drenati, a diversi tipi di approccio. Essi, facendo riferimento a dei pluviogrammi "di progetto", non consentono, tuttavia, di effettuare, se non "manualmente", un approccio variazionale quale quello necessario per una valutazione affidabile e statisticamente attendibile, delle portate al colmo di piena e dei massimi tiranti idrici.

2.2 DESCRIZIONE DEL MODULO IDROLOGICO-IDRAULICO UTILIZZATO PER LA VALUTAZIONE DELLE MASSIME PORTATE AL COLMO DI PIENA E DEI MASSIMI TIRANTI IDRICI ISTANTANEI.

All'interno della procedura di ottimizzazione si è fatto uso di un modello idrologico-idraulico di tipo Semi-Distribuito.

In tale modello, il bacino sotteso dall'ultima sezione di controllo della rete, viene suddiviso in tanti sottobacini. Tali sotto-bacini sono costituiti dalle aree colanti della

rete, a destra, a sinistra ed eventualmente a monte, di ogni singolo ramo della rete. Nota la curva di probabilità pluviometrica, con coefficiente di crescita di assegnato periodo di ritorno, la portata che perviene al generico tratto della rete, defluendo superficialmente lungo i due o tre sottobacini, che interessano il generico tratto della rete, viene valutata mediante l'uso dei classici modelli di trasformazione di afflussi in deflussi, per ogni sottobacino:

- Modello cinematico semplificato, nel quale la curva S (relazione tempo-area drenata), presenta una legge di tipo lineare. Essa incrementa linearmente a partire dal tempo $t=0$ fino al tempo $t=t_c$, dove t_c è il tempo di corrivazione. Si mantiene costante per $t_c < t < d$, dove d rappresenta la durata dell'evento meteorico. Infine decresce linearmente per $t > d$. In tal caso, per la valutazione di t_c possono essere utilizzate le seguenti formule:
 - Formula di Turazza (1879): $t_c = 93.744 \cdot A^{0.5}$ (dove t_c è espresso in secondi e l'area drenata A in m^2);
 - Prima formula di Ventura (1905): $t_c = 27.216 \cdot A^{0.5}$ (valida per le aree rurali nelle zone di Bologna);
 - La seconda formula di Ventura (1905): $t_c = 4.5792 \cdot I^{-1/2} \cdot \sqrt{A}$ (valida per aree con pendenze modeste. Dove I [m/m], rappresenta la pendenza media lungo la direzione principale di ruscellamento, data dalla formula
$$I = \left(\frac{\sum_{i=1}^N L_i}{\sum_{i=1}^N (L_i / \sqrt{I_i})} \right)^2$$
);
 - Prima formula di Pasini (1910): $t_c = 20.736 \cdot \sqrt[3]{AL}$ (valida per le zone nelle vicinanze di Ferrara. Dove L [m] è la massima lunghezza di ruscellamento);
 - Seconda formula di Pasini (1905): $t_c = 0.3888 \cdot I^{-1/2} \cdot \sqrt[3]{AL}$ (valida per aree con pendenze elevate);
 - La formula di Ongaro (1958): $t_c = 15.552 \cdot \sqrt[3]{AL}$ (valida per le reti di drenaggio nella zona del Piave).
- Modello cinematico con relazione tempo-area drenata generica.
- Metodo dell'invaso lineare, caratterizzato da un tempo di ritardo $t_r = k$;

- Modello di *Nash* a n serbatoi. Caratterizzato da una cascata di N_R serbatoi lineari con tempo di ritardo medio $K_0 = t_r / N_R$.

Nel presente lavoro si è fatto uso del primo modello. Per quanto riguarda il processo di infiltrazione, può essere utilizzato uno dei seguenti metodi:

- Selezione di un opportuno coefficiente di infiltrazione φ per ogni sottobacino della rete;
- Metodo Curve Number CN-II;
- Metodo di Horton-Philips.

In particolare, nel presente lavoro, si è scelto di utilizzare un coefficiente di filtrazione costante.

Dunque il modello idrologico-idraulico utilizzato, può essere sintetizzato nei seguenti passi:

1. Per ogni durata $d_{\min} \leq d_i \leq d_{\max}$ dell'evento meteorico, si iterano i seguenti passi ;
 - a. Si valuta, mediante la curva di probabilità pluviometrica, il pluviogramma rettangolare corrispondente;
 - b. Si applica il modello di infiltrazione scelto;
 - c. Si effettua la valutazione degli idrogrammi di piena applicando il modello di trasformazione di afflussi in deflussi scelto, ad ognuno dei sottobacini che interessano il generico ramo della rete;
 - d. Si applica il modello idraulico di propagazione delle piene, utilizzando gli idrogrammi di piena determinati al punto precedente come condizione al contorno sulle portate, determinando, in ogni sezione di interesse della rete, le portate al colmo di piena $Q_{d,\max}$ e i massimi tiranti istantanei $h_{d,\max}$.
2. Si determinano le massime portate al colmo di piena $Q_T = \max_d [Q_{d,\max}]$ ed i massimi tiranti istantanei $h_T = \max_d [h_{d,\max}]$, corrispondenti all'assegnato periodo di ritorno T , per ogni sezione di interesse della rete.

Utilizzando l'approccio appena descritto, all'interno dell'algoritmo di ottimizzazione, è dunque possibile determinare le peggiori condizioni, rispetto alle quali effettuare il dimensionamento ottimale della rete. Tuttavia il procedimento sopra descritto, richiede

un numero elevato di simulazioni idrauliche. Infatti, con riferimento agli algoritmi genetici, per ogni individuo costituente la popolazione, va effettuato un numero di simulazioni idrauliche tale da esplorare l'intervallo $[d_{\min}; d_{\max}]$, all'interno del quale ricercare Q_T e h_T , per ogni sezione significativa della rete. Ciò richiede l'utilizzo di modelli idraulici a basso costo computazionale ed in grado di simulare correttamente tutti i fenomeni che si realizzano, nelle reti di drenaggio, durante il passaggio della piena. Il *Modello Parabolico Linearizzato*, come mostrato nel capitolo 6 dai test effettuati, risulta essere idoneo a tale scopo.

3 MODELLI MATEMATICI PER LA PROPAGAZIONE MONODIMENSIONALE DELLE PIENE, NELLE CORRENTI A PELO LIBERO.

Le equazioni del “*De Saint Venant*” (1871) rappresentano, nell’ambito dell’Ingegneria Idraulica, il modello più utilizzato per la descrizione del moto monodimensionale dell’acqua nei canali a pelo libero ed in passato sono state utilizzate con successo in molte applicazioni. Da esse possono essere ricavati tutta una serie di modelli semplificati, linearizzati o semplificati e linearizzati allo stesso tempo, comunque in grado di interpretare, in maniera abbastanza soddisfacente, il fenomeno della propagazione delle onde di piena.

Nei primi paragrafi del presente capitolo, si è proceduto, alla derivazione di suddette equazioni e quindi, dei vari modelli semplificati che da esse derivano. Successivamente si è data una esposizione, sufficientemente dettagliata, dei modelli linearizzati e, di conseguenza, dei modelli semplificati e linearizzati e delle soluzioni analitiche che, per determinate condizioni al contorno, è possibile ricavare per tali modelli. Tali soluzioni sono in grado di descrivere, in maniera abbastanza soddisfacente, le caratteristiche principali del moto di un onda di piena.

3.1 DERIVAZIONE DELLE EQUAZIONI DEL MOTO VARIO MONODIMENSIONALE

La derivazione delle equazioni del moto dei fluidi, affonda le sue radici in tre leggi fondamentali della fisica, ovvero:

- conservazione della massa;
- conservazione della quantità di moto;
- conservazione dell’energia.

L’equazione del moto, del sistema che descrive il moto vario monodimensionale a pelo libero, per canali naturali o artificiali, può essere determinata sia utilizzando la legge di conservazione della quantità di moto che dell’energia. Mentre l’equazione di continuità fa sempre riferimento alla legge di conservazione della massa.

Nel presente paragrafo, tali equazioni, saranno determinate dapprima utilizzando le prime due leggi, secondo la procedura illustrata da “James A. Liggett” (“*Unsteady Flow in Open Channels*”, Mahmmod e Yevjevic 1975), dopodiché sarà mostrato come si può arrivare alla stessa espressione dell’equazione del moto, utilizzando il principio di conservazione dell’energia.

Equazione di continuità

Considerato un volume di controllo elementare, come mostrato in Fig.3.1, di lunghezza totale Δx , la legge di conservazione della massa stabilisce che la variazione del flusso di massa (portata) in entrata ed in uscita dal volume di controllo, devono eguagliare la variazione di volume nel tempo.

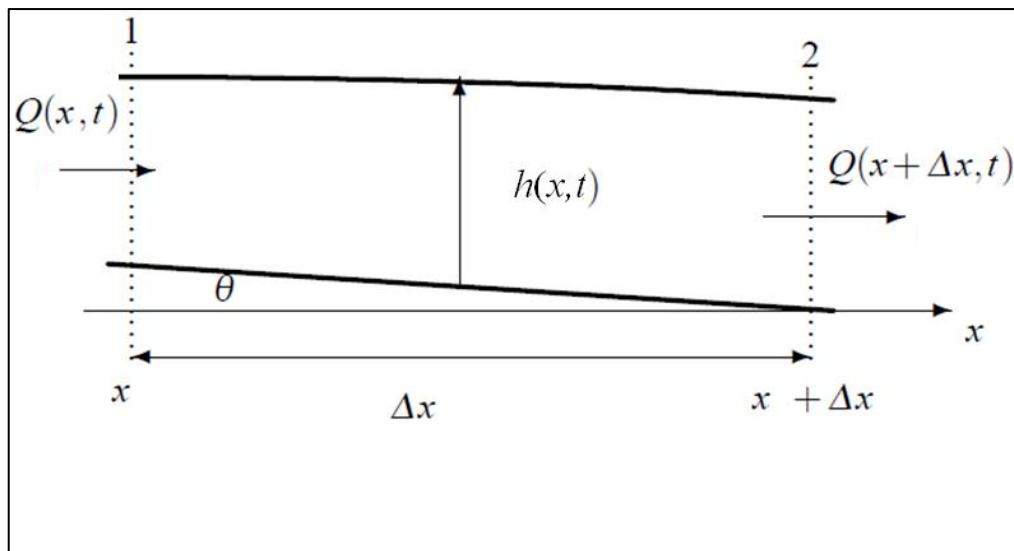


Fig.3.1 Volume di controllo.

Detta Q la portata al centro del volume di controllo, le variazioni del flusso di massa in ingresso F_i e in uscita F_u si possono scrivere come segue:

$$\begin{cases} F_i = Q - \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2} \\ F_u = Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2} \end{cases} ; \quad (2.1)$$

mentre tasso di variazione del volume si esprime come $\frac{\partial A}{\partial t} \Delta x$.

Assumendo che il Δx sia piccolo, la variazione della massa nel volume di controllo è uguale a:

$$\rho \frac{\partial A}{\partial t} = \rho \left[\left(Q - \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) + Q_l \right]; \quad (2.2)$$

dove Q_l è la portata che entra ai lati del volume di controllo e ρ è la densità del fluido. Semplificando e dividendo ambo i membri per $\rho \Delta x$ si arriva all'espressione finale dell'equazione di continuità:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q_l = 0; \quad (2.3)$$

nella quale q_l rappresenta la portata entrante lateralmente per unità di lunghezza.

Equazione del moto (Bilancio della quantità di moto)

L'equazione di conservazione della quantità di moto si ricava dall'applicazione della seconda legge di Newton, ovvero:

$$\sum F_x = \frac{dM}{dt}.$$

Essa stabilisce che la variazione netta della quantità di moto entrante nel volume di controllo (flusso della quantità di moto), più la somma delle forze agenti sul volume, eguaglia l'accumulo della quantità di moto nel tempo; dove per accumulo si intende la derivata rispetto al tempo della grandezza in esame. Essa è un'equazione vettoriale che sarà proiettata nella direzione del moto.

Il flusso della quantità di moto si esprime come la massa moltiplicata per il vettore delle velocità, mentre le forze agenti prese in considerazione sono le seguenti:

1. forza dovuta alla pressione;
2. forza di gravità;
3. forza di resistenza al moto.

Forze di Pressione: Si considera, per ipotesi, che la distribuzione delle pressioni sia idrostatica (la pressione varia linearmente con il tirante idrico). La risultante della forza di pressione è l'integrale, esteso alla sezione idrica, del prodotto tra la pressione puntuale e l'area elementare. La forza di pressione elementare dF_p , dunque, ha l'espressione seguente

$$dF_p = \rho g(h-y)B(y)dy, \quad (2.4)$$

dove y è la distanza dal pelo libero, g è l'accelerazione di gravità, h è il tirante idrico, $B(y)$ è la larghezza in superficie, funzione di y . Quindi la risultante delle forze di pressione F_p è

$$F_p = \int_0^h \rho g(h-y)B(y)dy. \quad (2.5)$$

Se F_p è la forza di pressione nel punto intermedio del volume di controllo, le forze di pressione agenti agli estremi di monte e di valle, del volume di controllo, si possono scrivere, rispettivamente, come:

$$\begin{cases} F_p - \frac{\partial F_p}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2} \\ F_p + \frac{\partial F_p}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2} \end{cases}. \quad (2.6)$$

Quindi la somma delle forze di pressione sarà uguale a

$$F_{press} = -\frac{\partial F_p}{\partial x} \Delta x + F_B, \quad (2.7)$$

dove F_B è la forza esercitata dal canale sul volume di controllo.

Differenziando il primo termine la (2.5), secondo la regola di Leibniz, e sostituendola nella (2.7), si perviene all'espressione:

$$F_{press} = -\rho g \Delta x \left[\frac{\partial h}{\partial x} \int_0^h B(y)dy + \int_0^h (h-y) \frac{\partial B(y)}{\partial x} dy \right] + F_B,$$

dove il primo integrale rappresenta l'area della sezione trasversale, mentre il secondo è la risultante delle forze esercitate dal fluido sul canale, che è esattamente uguale in valore, ma opposta in segno, ad F_B . Dunque la forza di pressione sul volume sarà:

$$F_{press} = -\rho g A \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x. \quad (2.8)$$

Forze di gravità: Il termine dovuto alla forza di gravità F_g , agente sul fluido nel volume di controllo, proiettata nella direzione del moto (fatta coincidere con la direzione dell'asse delle ascisse x), presenta la seguente espressione:

$$F_g = \rho g A \sin \theta \Delta x; \quad (2.9)$$

dove θ è l'angolo che la linea di fondo del canale forma con l'asse orizzontale. Poiché tale angolo (sia per i canali naturali che per le reti di drenaggio) risulta essere

abbastanza piccolo, allora $\sin \theta \approx \tan \theta = -\partial z_0 / \partial x$, dove z_0 è la quota del punto più depresso del canale. Dunque la (2.9) si modifica come segue:

$$F_g = -\rho g \frac{\partial z_0}{\partial x} \Delta x. \quad (2.10)$$

Resistenze al moto: Le resistenze F_f , all'interfaccia tra fluido e il canale, possono esprimersi come segue:

$$F_f = -\tau_0 \chi \Delta x, \quad (2.11)$$

dove τ_0 è lo sforzo (forza/unità di superficie) agente sulla superficie di contatto fluido-canale, e χ è il perimetro bagnato. Il segno negativo è dovuto al fatto che essa agisce in direzione opposta alla direzione del moto (considerata per convenzione positiva da monte verso valle, ovvero nella nostra direzione x). Da un'analisi dimensionale risulta che τ_0 può essere espresso in termini di un coefficiente di resistenza C_D come segue:

$$\tau_0 = \rho C_D V^2. \quad (2.12)$$

Il coefficiente C_D può essere legato al coefficiente di conducibilità idraulica C , che appare nella formula di *Chezy*, dalla relazione $C_D = g/C^2$, che sostituita nella (2.11) restituisce:

$$F_f = -\rho C_D V^2 \chi \Delta x = -\rho \frac{g}{C^2} (C \sqrt{RJ})^2 \chi \Delta x = -\rho g A J \Delta x; \quad (2.13)$$

nella quale R è il raggio idraulico e J la cadente dell'energia, che può essere valutata mediante le classiche formule di moto uniforme in uso nell'idraulica, ad esempio mediante la formula di *Gaukler-Strickler*: $J = Q|Q| / \left(K^2 A^2 R^{4/3} \right)$.

Flusso della quantità di moto: Il flusso entrante nel volume di controllo può essere scritto come:

$$\rho \left[QV - \frac{\partial QV}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right];$$

mentre quello uscente

$$\rho \left[QV + \frac{\partial QV}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right].$$

Conseguentemente il flusso risultante sarà dato da:

$$-\rho \frac{\partial QV}{\partial x} \Delta x.$$

Poiché la quantità di moto del fluido nel volume di controllo è pari a $\rho Q \Delta x$, la sua variazione nel tempo può essere scritta come segue

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Q \Delta x) = \rho \Delta x \frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (2.14)$$

A questo punto si può applicare il principio di conservazione della quantità di moto, ottenendo:

$$\rho \Delta x \frac{\partial Q}{\partial t} = -\rho \frac{\partial QV}{\partial x} \Delta x - \rho g A \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x - \rho g A \frac{\partial z_0}{\partial x} \Delta x - \rho g A J \Delta x; \quad (2.15)$$

dividendo tutto per $\rho \Delta x$, effettuando semplici manipolazioni algebriche, ponendo $\partial z / \partial x = -\sin \theta \approx -\tan \theta = -i$ e ricordando che $QV = Q^2 / A$ la (2.15) assume la forma:

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{gA} \left[\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) \right] = i - J. \quad (2.16)$$

La (2.16) è detta equazione dell'equilibrio idrodinamico.

Equazione del moto (principio di conservazione dell'energia)

L'equazione del moto può essere ricavata anche sfruttando il principio di conservazione dell'energia. Per giungere alla sua espressione basta aggiungere all'equazione di *Bernoulli* il termine inerziale

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t};$$

ottenendo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2g} \right) + \alpha \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} = -J; \quad (2.17)$$

Nella quale, i coefficienti di ragguaglio α e β , possono essere posti pari all'unità senza commettere errore apprezzabile. Essa rappresenta il bilancio di energia per unità di peso di fluido ed insieme all'equazione di continuità, costituisce il sistema di equazioni denominato “*Equazioni del De Saint Venant*”. Dall'equazione del moto, ricavata mediante il bilancio dell'energia, è possibile ricavare la (2.16) ottenuta mediante il principio di conservazione della quantità di moto. Sviluppando le derivate nella (2.17) e ponendo $\partial z / \partial x = -\sin \theta \approx -\tan \theta = -i$ si ottiene:

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{g} \left(V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) = i - J. \quad (2.18)$$

Sviluppando la derivata della velocità rispetto al tempo si può scrivere:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{A} \right) = \frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q}{A^2} \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (2.19)$$

Tenendo conto dell'equazione di continuità la (2.19) diventa:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} \right). \quad (2.20)$$

Quindi l'espressione tra parentesi nell'equazione (2.20) si può manipolare al seguente modo:

$$V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} = V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{A} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{1}{A} \left(Q \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} + V \frac{\partial Q}{\partial x} \right), \quad (2.21)$$

poiché

$$\frac{\partial(QV)}{\partial x} = Q \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad (2.22)$$

quindi

$$V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(QV)}{\partial x} \right) = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) \right). \quad (2.23)$$

Sostituendo l'espressione trovata per il termine tra le parentesi nell'equazione (2.23) si perviene all'espressione dell'equazione dell'equilibrio idrodinamico precedentemente determinata.

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{gA} \left[\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) \right] = i - J. \quad (2.24)$$

3.2 CLASSIFICAZIONE DEI MODELLI DERIVABILI DAL SISTEMA COMPLETO DELLE EQUAZIONI DEL MOTO.

Il sistema di equazioni costituito dall'equazione di continuità e l'equazione del moto scritto nella forma

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q_l = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{gA} \left[\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) \right] = i - J \end{cases}, \quad (2.25)$$

è un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali non lineare di tipo "Ipertbolico". Tale sistema di equazioni descrive la propagazione di un onda, di

qualsiasi natura essa sia (onda di piena, di svuotamento provocata dall'apertura di una paratoia ecc.), all'interno di un canale naturale o artificiale.

Le (2.25) vengono dette “*sistema completo*” o anche “*Onda Dinamica*”, e da esse è possibile derivare una serie di modelli che possono essere, a seconda delle ipotesi che vengono fatte alla base del problema “*semplificati*”, “*linearizzati*” o “*semplificati e linearizzati*”.

Un modello viene detto “*semplificato*” quando si trascurano uno o più termini del sistema completo; “*linearizzato*” quando, sotto opportune ipotesi (piccole perturbazioni), si riesce ridurre con manipolazioni algebriche la (2.25) ad un'equazione alle derivate parziali lineare, inoltre, se si trascurano uno o più termini, il modello anche “*semplificato*”. E dunque i modelli di propagazione delle onde di piena in un canale a pelo libero, possono essere schematizzati come segue:

- I. Modelli Completi;
 - *Modello completo* o onda dinamica;
 - “*Onda dinamica linearizzata*” o “*modello Iperbolico Linearizzato*”;
- II. Modelli semplificati;
 - “*Onda Diffusiva*” o “*Modello Parabolico*” (si trascurano i termini inerziali);
 - “*Modello parabolico linearizzato*”;
 - “*Onda Cinematica*” (si trascurano termini inerziali e di pressione)
 - “*Onda cinematica linearizzata*”;
 - “*Onda inerziale*” (resistenze al moto e pendenza motrice trascurabili, ma questa ipotesi è valida solo nei primi secondi del moto provocato dal crollo di una diga).

3.3 L'ONDA CINEMATICA.

Nell'ipotesi che nelle (2.25), siano trascurabili, rispetto ai termini legati alla forza peso e alle resistenze al moto, sia i termini inerziali che il termine legato alle forze di pressione e nell'ipotesi di assenza di influssi laterali, si ottiene il seguente sistema di equazioni, denominato “*Onda Cinematica*”:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ i = J \end{cases} \quad (2.26)$$

La (2.26) viene largamente impiegata, in campo tecnico, nel calcolo delle reti a pelo libero, sia nella sua forma completa (ILLUDAS e prime versioni di EPASWIMM), sia nelle forme che ne derivano da ipotesi semplificative (*Metodo dell'invaso*) che nelle forme che derivano dalla sua linearizzazione (*Metodo della Corrivazione*). Dalla seconda delle (2.26), si nota facilmente che nel modello cinematico il legame tra portate e tiranti idrici è esprimibile tramite leggi di moto uniforme. Si può pensare, quindi, di utilizzare la nota formula di Gauckler-Strickler, per il calcolo di J :

$$J = \frac{Q^2}{K^2 A^2 R^{4/3}}.$$

Tenendo conto della seconda delle (2.26), con semplici manipolazioni algebriche si ha:

$$Q = K \cdot A \cdot R^{2/3} \cdot i^{1/2},$$

e dunque la portata Q può essere vista come una funzione della sezione idrica A o viceversa.

La derivata totale di Q risulta essere:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} + c_k \frac{\partial Q}{\partial x},$$

nella quale $c_k = dx/dt$ rappresenta la celerità di propagazione della portata.

Poiché il legame tra portate e sezioni idriche è biunivoco, si può vedere $A = A(Q)$, e quindi la prima delle (2.26) può essere manipolata come segue:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (2.27)$$

Moltiplicando la (2.27) per $\partial Q / \partial A$, si ottiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial A} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} + c_k \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \quad (2.28)$$

La (2.28) può essere riscritta allo stesso modo per h , ottenendo:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c_{k_h} \frac{\partial h}{\partial x} = 0,$$

nella quale la celerità cinematica, con la quale si propaga il tirante, ha l'espressione:

$$c_{k_h} = \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial h}$$

Nella (2.28), $\partial Q/\partial A$ rappresenta la celerità di propagazione del modello cinematico con la quale si propaga la portata, inoltre dal confronto tra la derivata totale di Q e la (2.28) si ottiene che

$$\frac{dQ}{dt} = 0.$$

Si deduce, quindi, che nel modello cinematico l'onda si propaga senza attenuarsi ma deformandosi. Infatti il fronte d'onda diventa sempre più ripido, man mano che si procede verso valle, e la coda dell'onda tende ad appiattirsi.

Il picco dell'idrogramma di piena, per il modello descritto dalla (2.28), non si attenua nello spazio e nel tempo, non solo per l'osservatore che si sposta con velocità $dx/dt = c_k$, ma per qualsiasi altro osservatore, cioè indipendentemente dai valori singolari che può assumere dx/dt . Infatti, per la portata massima si ha sempre:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + c_k \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

essendo al colmo

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \xrightarrow{\text{deriv. totale}} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \xrightarrow{\text{eq. cont.}} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \xrightarrow{\text{deriv. totale h}} \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

Si nota, infine, che essendo $Q = K \cdot A \cdot R^{2/3} \cdot i^{1/2}$, la celerità del modello cinematico si può esprimere come:

$$\frac{\partial Q}{\partial A} = K \left[R^{2/3} + A \frac{2}{3} \frac{1}{\chi} R^{-1/3} \right] i^{1/2} = K \left[R^{2/3} + \frac{2}{3} R R^{-1/3} \right] i^{1/2} = \frac{5}{3} K R^{2/3} i^{1/2} = \frac{5}{3} v, \quad (2.29)$$

nella quale v è la velocità di moto uniforme.

Quindi la (2.28) può essere scritta come segue:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{5}{3} v \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \quad (2.30)$$

3.4 L'ONDA DIFFUSIVA (MODELLO PARABOLICO).

Nella maggior parte delle applicazioni pratiche, i termini inerziali dell'equazione del moto possono essere trascurati, sia perché sono dello stesso ordine di grandezza ma di segno opposto, sia perché sono di ordine di grandezza inferiore rispetto alla pendenza del fondo. Una approfondita analisi della possibilità, da parte di un modello diffusivo

di riprodurre i fenomeni di piena effettivamente osservabili all'interno di un tronco d'alveo di canale o di una rete di drenaggio, è stata a suo tempo effettuata da *Fread et al.* (1996), che ha dimostrato che:

1. Il peso dei termini trascurati dipende, sostanzialmente, solo dal numero di Froude della corrente (Fr) e da un parametro adimensionale Φ , a sua volta funzione del parametro di conducibilità di *Strickler*, del tirante idrico della corrente e dal tasso con cui quest'ultimo va variando nel tempo;
2. In quasi tutti i casi di interesse tecnico, il peso dei termini trascurati risulta inferiore al 4-6% dell'insieme di tutti i termini contenuti nell'equazione di bilancio delle quantità di moto;

Pertanto, di norma, i risultati ottenuti con l'ausilio dell'onda diffusiva si discostano molto poco da quelli ottenibili con l'ausilio di un modello dinamico completo quale quello rappresentato dalle (2.25).

Quindi trascurando i termini inerziali nelle (2.25), si perviene al seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{B} q_l - \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial x} = i - J \end{cases} \quad (2.31)$$

nella quale, la derivata della sezione idrica, è stata sviluppata nel seguente modo:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} = B \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.32)$$

Il sistema (2.31) può essere manipolato algebricamente al fine di ottenere un'unica equazione in una sola funzione incognita (portata o tirante idrico).

Derivando la prima delle (2.31) rispetto ad x e la seconda delle (2.31) rispetto a t si perviene al seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{B} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial B}{\partial x} \left(\frac{q_l}{B^2} - \frac{1}{B^2} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} = 0 \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} = - \frac{\partial J}{\partial t} \end{cases} \quad (2.33)$$

Ricordando che per la prima delle (2.31), vale la seguente espressione

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \left(\frac{q_l}{B} - \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} \right); \quad (2.34)$$

Sviluppando, nella seconda delle (2.32) la derivata di J rispetto a t e tenendo conto dell'espressione di $\partial h / \partial t$ ricavata dalla prima delle (2.31) si ha:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial Q} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{q_l}{B \partial J / \partial Q} - \frac{1}{B} \frac{\partial J / \partial h}{\partial J / \partial Q} \frac{\partial Q}{\partial x} \right). \quad (2.35)$$

Sostituendo quindi la (2.35) nella seconda delle (2.33), si arriva al sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{B} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial B}{\partial x} \left(\frac{q_l}{B^2} - \frac{1}{B^2} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} = 0 \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} = - \frac{\partial J}{\partial Q} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{q_l}{B \partial J / \partial Q} - \frac{1}{B} \frac{\partial J / \partial h}{\partial J / \partial Q} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (2.36)$$

Sostituendo, infine, la derivata parziale mista di h , dalle seconda delle (2.36) nella prima, si perviene, dopo semplici passaggi algebrici, all'equazione dell'onda diffusiva o parabolica, scritta per Q :

$$D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = C \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} - Cq; \quad (2.37)$$

dove

$$D = \frac{1}{B \partial J / \partial Q} \quad (2.38)$$

Rappresenta la diffusività parabolica e

$$C = - \frac{1}{B} \frac{\frac{\partial J}{\partial h}}{\frac{\partial J}{\partial Q}} \left(1 - \frac{1}{B} \frac{\frac{\partial B}{\partial x}}{\frac{\partial J}{\partial h}} \right); \quad (2.39)$$

che, con abuso di terminologia, viene definita celerità parabolica (infatti sarebbe più corretto parlare di convettività).

Analogamente si può pervenire ad un'equazione con h variabile dipendente in luogo di Q , ottenendo la seguente equazione:

$$D_h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = C_h \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{q_l}{B},$$

nella quale però cambia l'espressione C_h che, infatti, viene indicata con il pedice h , e presenta l'espressione:

$$C_h = - \frac{1}{B} \frac{\frac{\partial J}{\partial h}}{\frac{\partial J}{\partial Q}},$$

La C_h coincide con la C della (2.39) solo nel caso di alveo prismatico rettangolare, inoltre, si può dimostrare, che tale espressione coincide con la celerità dell'onda cinematica. I coefficienti C e D della (2.37) non sono delle costanti, ma sono in generale funzioni di Q e di h .

Dal modello descritto dall'equazione (2.37) si possono ricavare alcune importanti caratteristiche sul moto dell'onda. Per semplicità di esposizione si fa l'ipotesi che l'alveo sia prismatico (oltre che a sezione rettangolare) e che in ogni sezione la scala delle portate coincida con una scala di moto uniforme. In altre parole si suppone che il profilo del fondo sia rettilineo, con pendenza i , e che in condizioni di moto permanente il profilo del pelo libero sia parallelo al fondo dell'alveo (cioè che il moto permanente sia anche uniforme).

Si Consideri, inoltre, un osservatore che scende lungo il corso dell'acqua con velocità uguale a C , partendo da una sezione vicina a quella in cui si osserva il massimo della portata nello spazio (e in cui dunque la derivata $\partial Q/\partial x$ si annulla). Nell'intorno della sezione in cui $\partial Q/\partial x$ è nullo la derivata seconda $\partial^2 Q/\partial x^2$ è negativa. Ricordando ora che la derivata totale rispetto al tempo è:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + C \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Dalla prima delle (2.31), considerando assenza di portata immessa q_l , si ricava immediatamente che l'osservatore deve vedere una diminuzione della portata. D'altra parte è del tutto ragionevole attendersi che anche la sezione in cui si osserva il colmo della piena, cioè il massimo della portata nel tempo (e in cui quindi si annulla la derivata $\partial Q/\partial t$) si trovi nell'intorno della sezione in cui $\partial Q/\partial x = 0$. Dunque l'osservatore che scende lungo il corso d'acqua con velocità uguale a C , deve osservare una riduzione del colmo di piena. In altri termini, l'onda di piena si appiattisce scendendo verso valle. La capacità di rappresentare anche teoricamente il fenomeno della laminazione è una caratteristica del modello parabolico che lo rende un buon interprete del fenomeno della propagazione delle piene.

Si prenda ora in considerazione la perdita specifica di energia J , essa può essere calcolata sia mediante una qualsiasi formula di moto uniforme (valida, come sappiamo, anche in moto vario), sia dall'equazione del moto espressa dalla seconda delle (2.31). Dalla formula di Chézy, per esempio, si ottiene (attribuendo ai simboli i soliti significati) :

$$Q = A\chi\sqrt{RJ}$$

Mentre dall'equazione del moto (seconda delle (2.31)) si ottiene :

$$J = i - \frac{\partial h}{\partial x}$$

Sostituendo quindi la J della formula di Chèzy nell'equazione del moto, si ottiene:

$$Q = A\chi\sqrt{R\left(i - \frac{\partial h}{\partial x}\right)} = A\chi\sqrt{Ri}\sqrt{1 - \frac{1}{i}\frac{\partial h}{\partial x}},$$

nella quale, posto:

$$Q_0 = A\chi\sqrt{Ri}$$

si ricava:

$$Q = Q_0\sqrt{1 - \frac{1}{i}\frac{\partial h}{\partial x}}. \quad (2.40)$$

La portata Q_0 è la portata (di moto uniforme) fornita dalla scala di deflusso in corrispondenza dell'altezza d'acqua h contemporanea alla portata Q considerata di moto vario.

Dunque, nel modello parabolico, il legame tra le portate e le altezze d'acqua durante il moto vario non è più biunivoco come nel modello cinematico. In particolare, la portata Q che corrisponde all'altezza d'acqua h in una data sezione è uguale alla portata Q_0 , fornita dalla scala di deflusso di moto uniforme, soltanto se nell'istante considerato l'altezza d'acqua h è la maggiore tra le altezze d'acqua contemporaneamente osservabili in tutte le sezioni. Nelle sezioni più a valle la derivata $\partial h/\partial x$ è minore di zero e quindi la portata Q è maggiore di Q_0 . L'opposto accade nelle sezioni più a monte, dove invece la derivata $\partial h/\partial x$ è maggiore di zero. Da quanto sopra detto si deduce che la sezione in cui si osserva il massimo della portata nello spazio (nella quale $\partial Q/\partial x = 0$), si trova più a valle di quella in cui si osserva il massimo del livello nello spazio ($\partial h/\partial x = 0$).

Si consideri ancora la sezione in cui la portata assume il massimo valore nello spazio (la derivata $\partial Q/\partial x$ si annulla). Dall'equazione di continuità scritta considerando assenza di immissioni o di emissioni di portata:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B\frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

Si ricava immediatamente che nella sezione si deve annullare anche la derivata $\partial h / \partial t$. Dunque nella sezione in cui si osserva il massimo della portata nello spazio si deve contemporaneamente osservare il massimo del livello nel tempo.

Si consideri, infine, la sezione in cui la portata presenta il valore massimo nel tempo. Poiché la derivata $\partial Q / \partial t$ è uguale a zero, dall'equazione (2.37), del modello parabolico, si ricava immediatamente:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{D}{C} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}.$$

Poiché è logico supporre che la sezione, in cui si annulla la derivata temporale della portata, sia vicina a quella in cui si osserva il massimo di portata nello spazio, è anche logico supporre che la derivata seconda $\partial^2 Q / \partial x^2$ sia minore di zero. Tenendo conto del fatto che i coefficienti D e C sono, come si può facilmente verificare, entrambi positivi, si ricava che nella sezione in cui $\partial Q / \partial t$ si annulla, la derivata $\partial Q / \partial x$ è negativa. Dunque la sezione in cui si verifica il massimo di portata nel tempo si deve trovare a valle di quella in cui la portata assume il massimo valore nello spazio. Procedendo da monte verso valle si incontrano dunque successivamente le tre sezioni in cui si hanno il massimo livello nello spazio, la massima portata nello spazio (e quindi il massimo livello nel tempo) e la massima portata nel tempo.

In qualunque sezione del corso d'acqua si susseguono dunque nel tempo diversi fenomeni. Prima di tutto si osserva il passaggio della portata massima tra tutte quelle osservabili, per fissata sezione, nel tempo ($\partial Q / \partial t = 0$). Successivamente si verifica il massimo livello tra tutti quelli osservabili nella sezione durante il passaggio dell'onda di piena ($\partial h / \partial t = 0$), ed in tale istante, la portata è la più grande tra tutte quelle contemporaneamente osservabili lungo l'intero corso d'acqua ($\partial Q / \partial x = 0$), ciò è possibile, nonostante la portata sia già diminuita rispetto al massimo precedentemente osservato nella sezione, poiché, l'onda, procedendo da monte verso valle subisce un effetto di laminazione. Infine, nella sezione considerata, si osserva il massimo livello nello spazio. In questo istante la portata nella sezione è quella corrispondente all'altezza d'acqua nella formula di moto uniforme (Maione 1977).

Le considerazioni sull'ordine in cui i diversi fenomeni si presentano in una stessa sezione si possono riassumere riportando in un grafico l'andamento delle portate in una sezione in funzione delle altezze d'acqua, insieme con la scala di deflusso di moto

uniforme. Si supponga, per semplicità, che l'onda di piena disturbi uno stato di moto uniforme, al quale si ritorna dopo il passaggio della stessa. La curva delle portate, nella quale ogni punto corrisponde a un istante diverso, si stacca innanzitutto da un punto in corrispondenza della portata (e dell'altezza dell'acqua) di moto uniforme, e continua a salire fino a raggiungere il massimo della portata. Quindi inizia a scendere giungendo prima al massimo dell'altezza d'acqua nel tempo, successivamente la massimo del tirante nello spazio, ovvero dove taglia la curva di moto uniforme. La curva continua poi a scendere, restando al di sotto della scala di quella di moto uniforme, fino a raggiungere nuovamente il punto di partenza. La curva, che naturalmente varia da una piena all'altra, a causa della sua caratteristica forma prende il nome di cappio di piena. Facendo ricorso all'equazione già vista:

$$Q = Q_0 \sqrt{1 - \frac{1}{i} \frac{\partial h}{\partial x}}$$

è possibile ricavare, dalla registrazione dei livelli effettuata in una certa sezione in occasione di una piena e dalla sua scala di moto uniforme, il cappio di piena corrispondente alla piena considerata.

A causa della corrispondenza biunivoca tra le portate e le altezze d'acqua, nel caso del modello cinematico la celerità con cui una certa altezza d'acqua h si propaga in un alveo prismatico è uguale a quella con cui si propaga la corrispondente portata Q . Quindi l'equazione (2.28) del modello cinematico, che vale per le portate, vale anche per le altezze d'acqua. E dunque

$$\frac{\partial h}{\partial x} + C \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

Da cui si ricava immediatamente:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{C} \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (2.41)$$

Sostituendo l'espressione della derivata fornita dall'equazione (2.41), che nel caso del modello parabolico è solo approssimata, nella formula (2.40), si ottiene

$$Q = Q_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Ci} \frac{\partial h}{\partial t}}. \quad (2.42)$$

Questa formula, nota come *formula di Jones*, permette di costruire il cappio di piena adoperando le altezze d'acqua registrate durante il passaggio dell'onda di piena per calcolare Q_0 ed il rapporto incrementale con cui approssimare la derivata.

3.5 LA LINEARIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI DEL MOTO E I MODELLI LINEARIZZATI.

Un'altra famiglia di modelli, legati alle equazioni del moto vario monodimensionale, è costituita dai modelli linearizzati. Tali modelli trovano largo impiego, nonostante lo sviluppo dei calcolatori moderni abbia facilitato l'implementazione di modelli numerici per la soluzione del sistema completo, per il fatto che essi danno luogo a delle soluzioni analitiche o, comunque, a schemi numerici che consentono di simulare il moto vario nei canali a pelo libero molto più rapidamente.

Per determinare le equazioni del moto linearizzate è stata presa in considerazione l'equazione (2.16), nella quale, sviluppando $\partial(Q^2/A)/\partial x$ e ricordando che $B \partial h / \partial x = \partial A / \partial x$, si perviene all'espressione:

$$g y_m \left(1 - F_r^2\right) \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} = g A (i - J); \quad (2.43)$$

Dove $y_m = A/B$ è il tirante medio ed $F_r^2 = Q^2 B / g A^3$ è il quadrato del numero di Froude.

Si ipotizza, a questo punto, che le due variabili dipendenti A e Q siano esprimibili come:

$$\begin{cases} A(x,t) = A_0 + A'(x,t) + e_A(x,t) \\ Q(x,t) = Q_0 + Q'(x,t) + e_Q(x,t) \end{cases} \quad (2.44)$$

dove A_0 e Q_0 sono le variabili dipendenti calcolate rispetto ad uno stato stazionario iniziale, $A'(x,t)$ e $Q'(x,t)$ sono incrementi del primo ordine, ovvero rappresentano piccoli disturbi che si sovrappongono allo stato iniziale propagandosi nel canale ed i termini $e_A(x,t)$ ed $e_Q(x,t)$ sono i termini di ordine superiore (quantificano l'errore dell'approssimazione lineare).

Le (2.44) sostituite nell'equazione di continuità, in assenza di influssi laterali, conducono all'espressione:

$$\frac{\partial A'}{\partial t} + \frac{\partial Q'}{\partial x} = 0, \quad (2.45)$$

che è identica a quella già mostrata in precedenza. Per quanto riguarda l'equazione (2.43), invece, dopo aver sostituito le (2.44) al suo interno, si considera, per i coefficienti delle derivate parziali, uno sviluppo in serie di Taylor, intorno allo stato di riferimento (quindi al tempo $t = 0$), troncato ai termini del primo ordine. Essendo, quindi, questi ultimi funzioni delle due variabili dipendenti A e Q , si ottengono espressioni del tipo:

$$f(A_0 + A', Q_0 + Q') \approx f(A_0, Q_0) + \frac{\partial f(A_0, Q_0)}{\partial A} A' + \frac{\partial f(A_0, Q_0)}{\partial Q} Q', \quad (2.46)$$

dove con $f(A_0 + A', Q_0 + Q')$ si vuole indicare il generico coefficiente delle derivate parziali.

Sostituendo le (2.44) nella (2.43), adottando per i coefficienti non lineari espressioni del tipo (2.46) e trascurando infinitesimi di ordine superiore al primo (il che è lecito nelle ipotesi fatte di piccole perturbazioni), si perviene alla

$$gy_{m0} \left(1 - F_0^2\right) \frac{\partial A'}{\partial x} + \frac{\partial Q'}{\partial t} + \frac{2Q_0}{A_0} \frac{\partial Q'}{\partial x} = gA_0 \left\{ i - J_0 - \frac{\partial J_0}{\partial Q} Q' - \frac{\partial J_0}{\partial A} A' \right\}; \quad (2.47)$$

nella quale con il pedice “0”, si vuole indicare le funzioni valutate allo stato stazionario di riferimento (tempo $t = 0$).

Derivando la (2.45) rispetto a x , la (2.47) rispetto a t , si perviene al seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial A'}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 Q'}{\partial x^2} = 0 \\ gy_{m0} \left(1 - F_0^2\right) \frac{\partial A'}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 Q'}{\partial t^2} + \frac{2Q_0}{A_0} \frac{\partial Q'}{\partial x \partial t} = gA_0 \left\{ -\frac{\partial J_0}{\partial Q} \frac{\partial Q'}{\partial t} - \frac{\partial J_0}{\partial A} \frac{\partial A'}{\partial t} \right\} \end{cases} \quad (2.48)$$

Sostituendo, nella seconda delle (2.48), l'espressione

$$\frac{\partial A'}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 Q'}{\partial x^2}$$

ricavata dalla prima delle (2.48), e ricordando che per la (2.45) si ha:

$$\frac{\partial A'}{\partial t} = -\frac{\partial Q'}{\partial x};$$

si ottiene l'equazione (Deymiè 1935, Massè 1939):

$$gy_{m0} \left(1 - F_0^2\right) \frac{\partial^2 Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Q'}{\partial t^2} - \frac{2Q_0}{A_0} \frac{\partial Q'}{\partial x \partial t} = gA_0 \left\{ \frac{\partial J_0}{\partial Q} \frac{\partial Q'}{\partial t} - \frac{\partial J_0}{\partial A} \frac{\partial Q'}{\partial x} \right\}. \quad (2.49)$$

La (2.49) può essere riscritta con A' come variabile dipendente in luogo di Q' , ottenendo un'equazione identica alla (2.49), ovvero:

$$g y_{m0} (1 - F_0^2) \frac{\partial^2 A'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A'}{\partial t^2} - \frac{2Q_0}{A_0} \frac{\partial A'}{\partial x \partial t} = g A_0 \left(\frac{\partial J_0}{\partial Q} \frac{\partial A'}{\partial t} - \frac{\partial J_0}{\partial A} \frac{\partial A'}{\partial x} \right). \quad (2.50)$$

Il risultato appena ottenuto, può essere esteso ad una larga scelta di variabili dipendenti. Ciò può essere mostrato in termini di “*Potenziale perturbativo*”, introdotto da Deymiè (1935) e successivamente sviluppato da Supino (1950). Tale potenziale perturbativo può essere definito come una funzione la cui derivata parziale rispetto ad x restituisce la perturbazione rispetto alla sezione idrica mentre la derivata parziale rispetto al tempo restituisce l'opposto della perturbazione sulla portata:

$$\begin{cases} \frac{\partial U'}{\partial x} = A'(x, t) \\ \frac{\partial U'}{\partial t} = Q'(x, t) \end{cases}. \quad (2.51)$$

La definizione data dalle (2.51) assicura che l'equazione di continuità data dalla prima delle (2.51) sia automaticamente soddisfatta e quindi la sostituzione delle (2.51) nella (2.49) restituisce un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine per il potenziale perturbativo:

$$g y_{m0} (1 - F_0^2) \frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U'}{\partial t^2} - \frac{2Q_0}{A_0} \frac{\partial U'}{\partial x \partial t} = g A_0 \left(\frac{\partial J_0}{\partial Q} \frac{\partial U'}{\partial t} - \frac{\partial J_0}{\partial A} \frac{\partial U'}{\partial x} \right). \quad (2.52)$$

La (2.52) è dotata della stessa espressione matematica della (2.49) e della (2.50), da essa, inoltre, possono essere ottenute le equazioni dinamiche linearizzate per qualsiasi scelta delle variabili dipendenti (tirante, larghezza in superficie, velocità media ecc.).

La procedura sopra esposta per la linearizzazione dell'equazione dinamica, può essere applicata al modello diffusivo ottenendo il cosiddetto “*modello parabolico linearizzato*”:

$$D_0 \frac{\partial^2 Q'}{\partial x^2} = C_0 \frac{\partial Q'}{\partial x} + \frac{\partial Q'}{\partial t} - C_0 q, \quad (2.53)$$

E quindi il “*modello cinematico linearizzato*”

$$\frac{\partial Q'}{\partial t} + c_0 \frac{\partial Q'}{\partial x} = 0. \quad (2.54)$$

In particolare la (2.53) si presta a soluzioni analitiche che consentono di costruire un modello di propagazione delle piene incondizionatamente stabile, sia in assenza di influssi laterali che in presenza di essi. Mentre la (2.54) dà vita a una serie di modelli molto utilizzati in idrologia per lo studio del ruscellamento superficiale, come, ad esempio, il *metodo della corrivazione*.

L'applicabilità dei modelli semplificati e linearizzati è stata studiata da *Ponce & Simmons* (1977), analizzando l'effetto dei piccoli disturbi sinusoidali di periodo T applicati alle equazioni linearizzate, considerando una soluzione espressa in termini di combinazione di armoniche elementari, date dallo sviluppo in serie di *Fourier*:

$$Q(x, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} Q_n \exp(i\beta_n t + i\sigma_n x), \quad (2.55)$$

dove Q_n , β_n e σ_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie. Nel caso delle equazioni linearizzate su esposte, è sufficiente analizzare il comportamento della singola armonica della (2.55), per poi applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. Sostituendo la generica armonica nella (2.53) si ottiene:

$$\beta_n + C_0 \sigma_n - i D_0 \sigma_n^2 = 0 \Rightarrow \beta_n = \sigma_n (i D_0 \sigma_n - C_0), \quad (2.56)$$

che sostituita nell'espressione della singola armonica restituisce:

$$Q = Q_n \exp[i\sigma_n (x - C_0 t)] \exp(-D_0 \sigma_n^2 t), \quad (2.57)$$

nella quale il termine $Q_n \exp[i\sigma_n (x - C_0 t)]$ è responsabile della traslazione, a velocità C_0 , di una sinusoide di ampiezza Q_n e frequenza angolare proporzionale a σ_n , mentre $\exp(-D_0 \sigma_n^2 t)$ fa decadere l'ampiezza Q_n esponenzialmente (effetto di laminazione), con decadimento che è tanto più grande quanto più è piccola la lunghezza d'onda e, quindi, crescente con la diffusività D_0 . Gli autori hanno concluso che il modello cinematico è applicabile quando:

$$\frac{T v_0 i}{h_0} \geq 171; \quad (2.58)$$

in quanto tale condizione assicura un errore del 5% nell'espressione dell'ampiezza del disturbo, dopo un intervallo di tempo pari al periodo T . La condizione (2.58), per piccole pendenze, risulta soddisfatta per periodi del disturbo sinusoidale molto lunghi (dell'ordine di diverse ore o giorni per pendenze estremamente piccole), mentre per pendenze maggiori (dell'ordine di 0.01), sono sufficienti periodi di qualche ora.

Mentre dal confronto tra l'onda diffusiva e quella dinamica, risulta che il modello parabolico è accettabile quando:

$$T i \sqrt{\frac{g}{h_0}} \geq 30, \quad (2.59)$$

in quanto questa condizione assicura che la differenza di ampiezza del disturbo nei modelli diffusivo e completo, dopo un intervallo di tempo pari al periodo T , sia contenuto entro il 5%, ciò viene assicurato sempre per piccole pendenze se i periodi non sono troppo brevi (come mostrato da *Fread* nel 1996 il peso dei termini inerziali incide più del 5% sull'equazione del moto solo nel caso di rottura delle dighe), mentre per pendenze elevate la (2.59) è assicurata per periodi non troppo lunghi.

In conclusione il modello cinematico fornisce risultati accettabili nel caso di forti pendenze (tipiche delle zone montane o pedemontane), mentre per piccole pendenze fornisce buoni risultati solo nel caso di idrogrammi di piena molto lenti.

Il modello parabolico linearizzato, invece, ha un campo di applicazione molto più ampio, in quanto permette di portare in conto non solo effetti di rigurgito da valle, ma può essere applicato nella maggior parte dei casi di interesse tecnico. Infatti grandi pendenze in genere sono presenti nelle zone montane, quindi i bacini hanno risposte abbastanza veloci e di conseguenza gli idrogrammi di piena crescono in maniera rapida, al contrario, nelle zone pianeggianti (fatta eccezione per i fenomeni di rottura delle dighe), la risposta è in genere lenta e quindi gli idrogrammi crescono lentamente, e dunque la condizione (2.59) risulta soddisfatta nella maggior parte dei casi di interesse pratico.

3.6 SOLUZIONE ANALITICA PER L'EQUAZIONE DELL'ONDA DINAMICA LINEARIZZATA.

La diffusione dei calcolatori elettronici, negli ultimi decenni, consente di utilizzare codici di calcolo numerici per la soluzione delle equazioni del De Saint Venant non lineari. Nonostante ciò, i modelli linearizzati conservano un posto di rilievo sia in ambiti di ricerca che in ambiti applicativi. Infatti, tali modelli, conservano le caratteristiche dei corrispettivi non lineari, e consentono di fornire una soluzione più rapida, dal punto di vista computazionale, rispetto ai modelli non lineari dai quali derivano (*Todini* 1986, *Litrice* 2010).

Una delle caratteristiche principali dei modelli linearizzati è che da essi possono essere ricavate soluzioni analitiche per determinate condizioni al contorno e iniziali. A tal fine è necessario avvalersi di alcuni strumenti matematici molto potenti, per la soluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali, come ad esempio le *Funzioni di Green* o

la *Trasformata di Laplace*. L'utilizzo di quest'ultima si rivela essere molto vantaggioso in quanto un'equazione differenziale alle derivate parziali, ha come immagine, nel dominio della *Trasformata di Laplace*, un'equazione differenziale ordinaria che può essere facilmente risolta.

Data una funzione reale $F(t)$ di variabile reale t , la sua *Trasformata di Laplace*, indicata con $L[F(t)] = f(s)$, è definita come:

$$f(s) = \int_0^{\infty} F(t) e^{-st} dt; \quad (2.60)$$

Con $s = x + iy$ variabile complessa. Una delle proprietà fondamentali della *Trasformata di Laplace* è la seguente (Doetsch 1961):

$$L\left(\frac{dF(t)}{dt}\right) = sf(s) - f(0); \quad L\left(\frac{d^2F(t)}{dt^2}\right) = s^2 f(s) - sF(0) - \frac{dF(0)}{dt}. \quad (2.61)$$

In sostanza essa trasforma una derivata prima o seconda (ma anche le derivate di ordine superiore) in una differenza tra funzioni.

Considerato un *Problema di Cauchy*, costituito dall'equazione (2.49) (dove per semplicità di trattazione si è eliminato il pedice 0 dei coefficienti e l'apice dalla variabile dipendente), e da un "set" di condizioni iniziali e al contorno come segue:

$$\begin{cases} gy_m(1-F^2) \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial t^2} - 2V \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x \partial t} = gA \left(\frac{\partial J}{\partial Q} \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial J}{\partial A} \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} \right); \\ Q(x,0) = 0; \quad Q(0,t) = \delta(t); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} Q(x,t) = 0; \quad \frac{\partial Q(x,0)}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (2.62)$$

La *Trasformata di Laplace* della prima delle (2.62), utilizzando le proprietà definite dalle (2.61), ha la seguente espressione:

$$\begin{aligned} gy_m(1-F^2) \frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2} - s^2 U(x,s) + sQ(x,0) + \frac{\partial Q(x,0)}{\partial t} - 2Vs \frac{\partial U(x,s)}{\partial x} + \\ + 2V \frac{\partial}{\partial x} [Q(x,0)] = gA \left(\frac{\partial J}{\partial Q} sU(x,s) - Q(x,0) - \frac{\partial J}{\partial A} \frac{\partial U(x,s)}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.63)$$

dove $U(x,s) = L[Q(x,t)]$.

Applicando la prima e la quarta condizione delle (2.62), la (2.63) si riduce a:

$$\begin{aligned} gy_m(1-F^2) \frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2} - s^2 U(x,s) + \\ - 2Vs \frac{\partial U(x,s)}{\partial x} = gA \left(\frac{\partial J}{\partial Q} sU(x,s) - \frac{\partial J}{\partial A} \frac{\partial U(x,s)}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (2.64)$$

La (2.64) è un'equazione differenziale ordinaria per la *Trasformata di Laplace* $U(x, s)$ come funzione di x . La soluzione della (2.64) può essere scritta nella seguente forma generale:

$$U(x, s) = A \exp[\lambda_1(x)] + B \exp[\lambda_2(x)], \quad (2.65)$$

dove λ_1 e λ_2 sono le radici del seguente polinomio caratteristico, associato all'equazione (2.64):

$$gy_m(1-F^2)\lambda^2 + \left(-2Vs + gA \frac{\partial J}{\partial A}\right)\lambda - \left(s^2 + gA \frac{\partial J}{\partial Q}s\right)\lambda = 0; \quad (2.66)$$

Mentre A e B sono costanti da determinare in modo che siano soddisfatte le condizioni al contorno. Poiché la (2.66) è un'equazione di secondo grado, la soluzione, e quindi l'espressione di λ_1 e λ_2 , può essere scritta direttamente. Usando la soluzione standard delle equazioni di secondo grado e raccogliendo a fattor comune per potenze della variabile complessa s si ottiene l'espressione:

$$\lambda_{1,2} = esx - fx \pm x\sqrt{as^2 + bs + c}, \quad (2.67)$$

nella quale (al fine di ottenere le seguenti formule, si è utilizzata, per il calcolo di J , la formula di *Gauckler-Strickler*):

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{gh_m(1-F^2)^2}; b = \frac{2}{3} \frac{J(2F^2+3)}{Vh_m(1-F^2)^2}; \\ c &= \frac{25JQ}{9h_m^2(1-F^2)^2}; e = \frac{(gh_m)^{-1/2}F}{(1-F^2)}; f = -\frac{5J}{3h_m(1-F^2)}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Quindi la (2.66) può essere riscritta come segue:

$$U(x, s) = A \exp(esx + fx - x\sqrt{as^2 + bs + c}) + B \exp(esx + fx + x\sqrt{as^2 + bs + c}); \quad (2.69)$$

(il segno + avanti ad f è dovuto al fatto che per $F < 1$, f è negativa, e nel polinomio caratteristico appare con il segno - avanti).

Per la quarta delle (2.62), e nell'ipotesi che $F < 1$, $U(x, s)$ deve essere limitata per $x \rightarrow \infty$. Affinché tale condizione al contorno sia rispettata, deve risultare $B = 0$. Per determinare il coefficiente A basta applicare la terza delle (2.62), che non può essere utilizzata direttamente come funzione del tempo in quanto la $U(x, s)$ è l'immagine di $Q(x, t)$ nel dominio di *Laplace* e, quindi, deve anche essa essere trasformata. La *L-Trasformata* della *Delta di Dirac* risulta essere (Doetsch 1961) $L[\delta(t)] = 1$, quindi applicando alla (2.69) la terza delle (2.62) trasformata, si ottiene:

$$U(0,s) = A = 1, \quad (2.70)$$

Quindi la soluzione al *problema di Cauchy*, definito dalle (2.62), nel dominio della *Trasformata di Laplace*, per $F < 1$, risulta essere:

$$U(x,s) = \exp(esx + fx - x\sqrt{as^2 + bs + c}). \quad (2.71)$$

Per ottenere la soluzione nel dominio del tempo, e quindi ottenere $Q(x,t)$, bisogna effettuare l'operazione inversa alla *Trasformata di Laplace*, ovvero bisogna calcolare l'*Anti-Trasformata di Laplace* della (2.71).

La trasformata inversa della (2.71) può essere determinata facendo uso dell'intuizione avuta dal matematico tedesco *Gustav Doetsch* (1961 p. 179):

$$e^{-x\sqrt{as^2+bs+c}} = e^{-\left(\frac{b}{2}\sqrt{a}\right)x} \cdot e^{(-\sqrt{a}xs)} + \sqrt{\frac{d}{a}} x \int_0^\infty e^{-st} e^{-\left(\frac{b}{2}\sqrt{a}\right)t} \frac{I_1\left(\frac{\sqrt{d}}{a}\sqrt{t^2-ax^2}\right)}{\sqrt{t^2-ax^2}} H(t-ax) dt, \quad (2.72)$$

dove $I_1(\bullet)$ è la *funzione di Bessel Modificata di Prima Specie* e ordine 1; $H(\bullet)$ è la *Distribuzione di Heavyside*.

Utilizzando le proprietà di traslazione, di linearità e di cambiamento di scala della *Trasformata di Laplace* (Doetsch 1961), si ottiene l'espressione della $Q(x,t)$ nel tempo:

$$Q(x,t) = \delta\left(t - \left(\sqrt{a} - e\right)x\right) e^{\left(f - \frac{b}{\sqrt{a}}\right)x} + e^{\left(fx - \frac{b(t+ex)}{2a}\right)} x \sqrt{\frac{d}{a}} \frac{I_1\left(\frac{\sqrt{d}}{a}\sqrt{(t+ex)^2 - ax^2}\right)}{\sqrt{(t+ex)^2 - ax^2}} H\left(t - \left(\sqrt{a} - e\right)x\right) \quad (2.73)$$

dove $d = b^2/4 - ac$.

E' importante sottolineare che la (2.73) è la stessa per qualsiasi scelta della variabile dipendente.

L'espressione appena ottenuta per $Q(x,t)$, può essere vista come la somma di due funzioni:

$$Q(x,t) = Q_1(x,t) + Q_2(x,t).$$

La prima parte indicata con $Q_1(x,t)$, rappresenta un impulso che si propaga verso valle, la cui intensità decresce esponenzialmente con l'ascissa:

$$Q_1(x,t) = \delta\left(t - \left(\sqrt{a} - e\right)x\right) e^{-\left(\frac{b}{\sqrt{a}} + f\right)x}. \quad (2.74)$$

Si noti che la (2.74) contribuisce alla portata in una determinata sezione, soltanto nell'istante $t = x\sqrt{a} - ex$ e può essere interpretata come il fronte dell'onda. Il secondo termine $Q_2(x, t)$, che è anche il più grande in termini di contributo, può essere visto come il corpo dell'onda ed è dato da:

$$Q_2(x, t) = e^{-\left(\frac{b(t+ex)}{2a} - fx\right)} \frac{\sqrt{\frac{d}{a}} x I_1\left(\frac{\sqrt{d}}{a} \sqrt{(t+ex)^2 - ax^2}\right)}{\sqrt{(t+ex)^2 - ax^2}} H\left(t - (\sqrt{a} - e)x\right); \quad (2.75)$$

Esso inizia a contribuire a partire dall'istante $t > x\sqrt{a} - ex$, e descrive un'onda che va attenuandosi nel tempo.

3.7 SOLUZIONE ANALITICA DELL'EQUAZIONE PARABOLICA LINEARIZZATA.

In maniera analoga a quanto fatto, nel precedente paragrafo, per il modello completo linearizzato, è possibile determinare una soluzione analitica per l'equazione dell'onda parabolica linearizzata:

$$D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = C \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t}, \quad (2.76)$$

dove per semplicità di trattazione, rispetto alla (2.53), è stato rimosso il pedice “0” dai coefficienti e l'apice “’” dalla variabile dipendente.

Considerato il seguente “set” di condizioni al contorno:

$$\begin{cases} Q(0, t) = \delta(t) \\ Q(x, 0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} Q(x, t) = 0 \end{cases}, \quad (2.77)$$

Il *Problema di Cauchy* definito dalla (2.76) e dalle (2.77), può essere risolto ancora con l'uso della *Trasformata di Laplace*. Tenendo conto delle condizioni al contorno e trasformando la (2.76) si ottiene:

$$D \frac{d^2 U(x, s)}{dx^2} - C \frac{dU(x, s)}{dx} + sU(x, s) = 0. \quad (2.78)$$

La soluzione generale della (2.78) può essere scritta come:

$$U(x, t) = A \exp\left(\frac{Cx}{2D} - \frac{x}{2D} \sqrt{C^2 + 4Ds}\right) + B \exp\left(\frac{Cx}{2D} + \frac{x}{2D} \sqrt{C^2 + 4Ds}\right). \quad (2.79)$$

Applicando la terza delle (2.77), deve risultare che $B=0$ e, per la prima delle (2.77) $A=1$. quindi la soluzione nel dominio della *Trasformata di Laplace* può essere scritta nella seguente maniera:

$$U(x,t) = \exp\left(\frac{Cx}{2D}\right) \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{D}} \sqrt{s + \frac{C^2}{4D}}\right). \quad (2.80)$$

Al fine di determinare l'*Anti-Trasformata* della (2.80), è necessario ricorrere direttamente alla definizione della trasformata inversa di *Laplace*, ovvero:

$$Q(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{k-\lambda i}^{k+\lambda i} e^{st} U(x,s) ds. \quad (2.81)$$

La (2.81) è un integrale di linea calcolato lungo un segmento del *piano di Gauss* che va da $k - \lambda i$ a $k + \lambda i$, facente parte di una retta detta *Retta di Bromwich* (Fig.3.2).

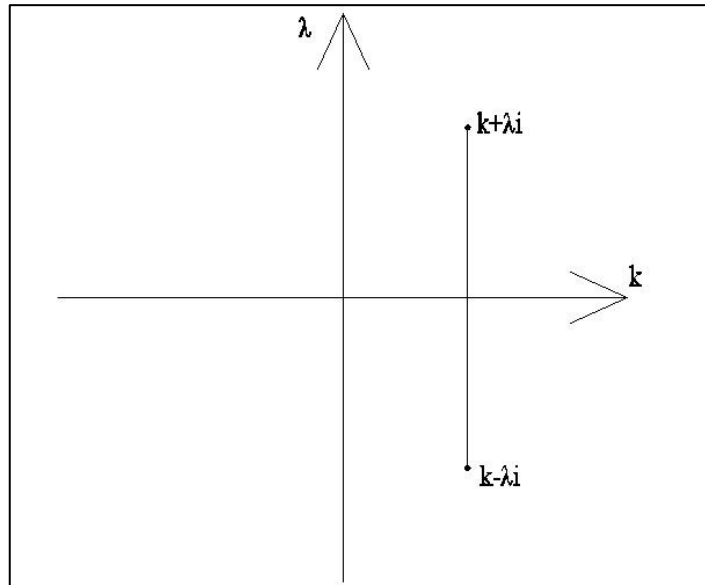


Fig.3.2 Retta di Bromwich

Per il *Teorema Integrale di Cauchy* (Arfken & Weber 1994), l'integrale di una funzione *olomorfa* calcolato lungo percorso chiuso è nullo. Di conseguenza la (2.81) equivale all'integrale calcolato lungo un arco di circonferenza che va dal punto $k - \lambda i$ al punto $k + \lambda i$ detto *Contorno di Bromwich*. I risultati del *Teorema Integrale di Cauchy* sono applicabili solo a funzioni che sono *olomorfe* nei punti interni al cammino di integrazione. La funzione definita dalla (2.80), presenta un punto di diramazione in corrispondenza di $s = -C^2/4D$. Di conseguenza il *Contorno di Bromwich* deve essere modificato in modo da eliminare i punti di diramazione e rendere la (2.80) *olomorfa*

nell'insieme che ha come frontiera il cammino di integrazione. A tal scopo si effettuano i cosiddetti tagli di *Riemann*, in modo da escludere la parte dell'asse reale negativo dove la funzione considerata non risulta essere *olomorfa* (Morse & Feshbach 1953). Il percorso di integrazione è la curva Λ costituita da due archi di circonferenza C_1 e C_2 di raggio ρ e centro nell'origine, due segmenti Γ_1 e Γ_2 , rispettivamente nel quadrante superiore e nel quadrante inferiore dell'asse reale negativo, i cui punti appartengono all'intervallo $[-\rho, -\varepsilon - C^2/4D]$ e un cerchio ε di raggio infinitesimo e centro nel punto $-C^2/4D$ (Fig.3.3).

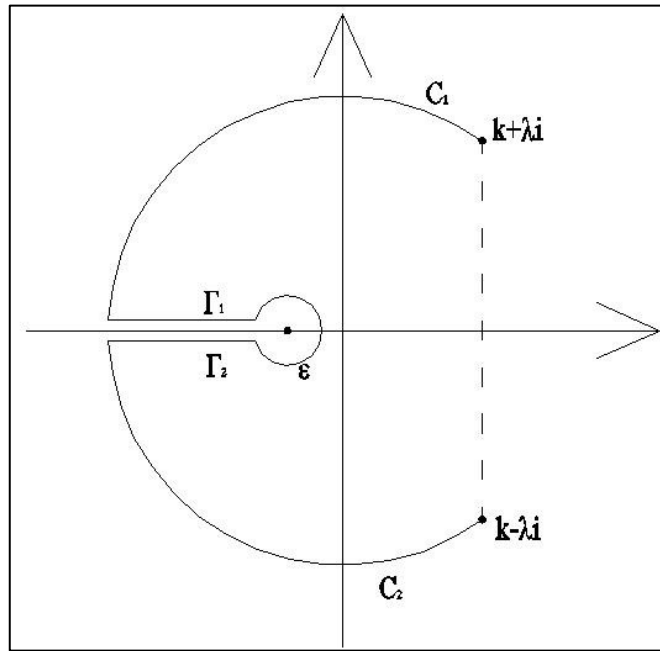


Fig.3.3 Cammino di integrazione.

Quindi per il *Teorema Integrale di Cauchy* si ha che:

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{k-\lambda i}^{k+\lambda i} e^{st} U(x, s) ds = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\substack{\rho \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{\Lambda} e^{\text{Re}^{i\theta} t} U(x, \text{Re}^{i\theta}) d\Lambda$$

Per il *Lemma di Jordan* (Arfken & Weber 1994), l'integrale (2.81) calcolato lungo i percorsi C_1 e C_2 risulta essere nullo per $\rho \rightarrow \infty$ e, come si può facilmente dimostrare, risulta nullo anche il contributo calcolato lungo il cerchietto centrato in $-C^2/4D$, per $\varepsilon \rightarrow 0$. Restano solo i contributi lungo i due segmenti $\Gamma_1 = [-\rho, -\varepsilon - C^2/4D]$ e $\Gamma_2 = [-\varepsilon - C^2/4D, -\rho]$.

Lungo il segmento Γ_1 , i numeri complessi $(s + C^2/4D)$, s ed il differenziale, valgono rispettivamente:

$$(s + C^2/4D) = \rho e^{\pi i}; \quad s = (\rho + C^2/4D) e^{\pi i}; \quad ds = e^{\pi i} d\rho.$$

Lungo il segmento Γ_2 , invece, si ha che:

$$(s + C^2/4D) = \rho e^{-\pi i}; \quad s = (\rho + C^2/4D) e^{-\pi i}; \quad ds = e^{-\pi i} d\rho.$$

Quindi, posto per semplicità di notazione $a = C^2/4D$ e $b = x/\sqrt{D}$, prendendo direttamente il limite $\rho \rightarrow \infty$, l'integrale (2.81) diventa :

$$\begin{aligned} & \frac{e^{\left(\frac{Cx}{2D}\right)}}{2\pi i} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{k-\lambda i}^{k+\lambda i} e^{st} e^{-\frac{x}{\sqrt{D}}\sqrt{s+a}} ds = \frac{e^{\left(\frac{Cx}{2D}\right)}}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-(\rho+a)t} e^{-ib\sqrt{\rho}} d\rho + \frac{e^{\left(\frac{Cx}{2D}\right)}}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-(\rho+a)t} e^{ib\sqrt{\rho}} d\rho = \\ & = \frac{e^{\left(\frac{Cx}{2D}\right)}}{\pi} \int_0^\infty e^{-(\rho+a)t} \frac{(e^{ib\sqrt{\rho}} - e^{-ib\sqrt{\rho}})}{2i} d\rho = \frac{e^{\left(\frac{Cx}{2D}-at\right)}}{\pi} \int_0^\infty e^{-\rho t} \sin(b\sqrt{\rho}) d\rho \end{aligned} \quad (2.82)$$

Quindi è necessario saper valutare l'ultimo integrale della (2.82).

Eseguendo la sostituzione di variabile $\rho = Du^2$ e ricordando le espressioni di a e b , si perviene a:

$$I(x, t) = \int_0^{+\infty} u D e^{-u^2 D t} \sin(ux) du. \quad (2.83)$$

Per calcolare l'integrale (2.83) si può procedere al seguente modo (omettendo il termine fuori l'ultimo integrale della (2.82), per poi moltiplicarlo alla fine dei calcoli) :

$$\begin{aligned} I(x, t) &= D \int_0^{+\infty} u e^{-u^2 D t} \sin(ux) du = \left[-\frac{1}{2t} e^{-u^2 D t} \sin(ux) du \right]_0^{+\infty} + \frac{x}{2t} \int_0^{+\infty} e^{-u^2 D t} \cos(ux) du = \\ &= \frac{x}{2t} \int_0^{+\infty} e^{-u^2 D t} \cos(ux) du \end{aligned} \quad (2.84)$$

Derivando rispetto a x la funzione definita da $\frac{2t}{x} I(x, t)$ si ottiene:

$$\frac{d}{dx} \left(I(x, t) \frac{2t}{x} \right) = - \int_0^{+\infty} u e^{-u^2 D t} \sin(ux) du = -\frac{1}{D} I(x, t),$$

quindi:

$$\frac{dI}{dx} \frac{2t}{x} - I \frac{2t}{x^2} = -\frac{I}{D}. \quad (2.85)$$

Dividendo primo e secondo membro della (2.85) per $2t \cdot I$ e moltiplicando per x , si ottiene:

$$\frac{1}{I} \frac{dI}{dx} = \frac{1}{x} - \frac{x}{2Dt} \Rightarrow \ln(I) = \ln(x) - \frac{x^2}{4Dt} + A(t) \Rightarrow I(x, t) = A(t) x e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \quad (2.86)$$

Dunque è necessario conoscere $A(t)$. A questo scopo si può osservare che:

$$\frac{dI}{dx} = A(t) e^{-\frac{x^2}{4Dt}} - A(t) \frac{x}{4Dt} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \Rightarrow \frac{dI(0, t)}{dx} = A(t), \quad (2.87)$$

Quindi calcolando in $x = 0$, la derivata rispetto ad x dell'espressione (2.83), si ha:

$$\frac{dI}{dx} = D \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2 Dt} \cos(ux) du \Rightarrow \frac{dI(0, t)}{dx} = D \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2 Dt} du = A(t). \quad (2.88)$$

Integrando per parti l'ultimo integrale della (2.88), si ottiene:

$$D \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2 Dt} du = \left[-\frac{u}{2t} e^{-u^2 Dt} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2t} \int_0^{+\infty} e^{-u^2 Dt} du; \quad (2.89)$$

dove il primo termine a secondo membro è nullo, mentre sostituendo $u^2 Dt = g^2$, nell'ultimo integrale al secondo membro, si perviene a:

$$A(t) = \frac{1}{2t} \int_0^{+\infty} e^{-u^2 Dt} du = \frac{1}{2t\sqrt{Dt}} \int_0^{+\infty} e^{-g^2} dg = \frac{1}{2t\sqrt{Dt}} \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

ricordando la (2.86), si giunge all'espressione:

$$I(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4Dt^3}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} x e^{-\frac{x^2}{4Dt}}.$$

Moltiplicando la soluzione ottenuta per i termini lasciati fuori dall'ultimo integrale della (2.83), che non sono stati coinvolti nelle operazioni appena svolte, si ottiene l'espressione cercata per $Q(x, t)$:

$$Q(x, t) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{4Dt^3}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} x e^{\frac{2Cx - C^2 t}{4D}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} = \frac{x}{\sqrt{4D\pi^3}} e^{-\frac{(x-Ct)^2}{4Dt}} = u_x(t). \quad (2.89)$$

La (2.89) coincide con le soluzioni presenti in letteratura tecnica (Hayami 1951, Dooge 1973).

Tale soluzione, integrata nel tempo per far fronte a funzioni discrete in ingresso (come si vedrà successivamente), permette di costruire un modello incondizionatamente stabile, basato sull'onda diffusiva linearizzata.

3.8 SOLUZIONE ANALITICA PER L'EQUAZIONE DELL'ONDA PARABOLICA LINEARIZZATA IN PRESENZA DI AFFLUSSI LATERALI.

L'equazione parabolica linearizzata in presenza di afflussi laterali è data dalla (2.53). Omettendo il pedice "0" dai coefficienti e l'apice " ' " dalle variabili dipendenti, può essere scritta nella forma:

$$D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = C \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} - Cq. \quad (2.90)$$

Una trattazione rigorosa, riguardo la determinazione della soluzione analitica della (2.90), dovrebbe essere fatta utilizzando la teoria delle *Funzioni Di Green*. Una tale trattazione risulterebbe essere estremamente lunga e quindi si è scelto di determinare la soluzione in maniera semplificata, basandosi su un'interpretazione fisica della (2.90). Considerando la portata uniformemente distribuita espressa da un impulso unitario $q = \delta(t)$, in maniera tale da poter esprimere qualsiasi tipo di ingresso laterale mediante un *Integrale di Convoluzione* della soluzione ottenuta, in virtù del principio di sovrapposizione degli effetti. Quanto appena detto non ha senso dal punto di vista matematico e va spiegato utilizzando, appunto, la teoria legata alle *Funzioni di Green* (si veda Morse & Feshbach 1953, Arfken & Weber 1994).

Poiché $q = \delta(t)$, l'equazione (2.90) può essere scritta come segue:

$$D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - C \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t} = -C\delta(t). \quad (2.91)$$

Volendo studiare la propagazione delle sole perturbazioni dovute alle portate immesse lateralmente, si considera il seguente insieme di condizioni iniziali e al contorno:

$$\begin{cases} Q(0, t) = 0 \\ Q(x, 0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} Q(x, t) = 0 \end{cases}, \quad (2.92)$$

Essendo applicabile il principio di sovrapposizione degli effetti, si può sommare la soluzione per disturbi immessi da monte, ottenuta precedentemente, con la soluzione che si sta cercando nel caso in esame. Volendo trattare la soluzione in termini non rigorosi, si può notare che il secondo membro della (2.91) è diverso da 0 solo all'istante $t = 0$. Valutando la (2.91) in tale istante e ricordando le (2.92), si deduce che

$$D \frac{\partial^2 Q(x, 0)}{\partial x^2} - C \frac{\partial Q(x, 0)}{\partial x} - \frac{\partial Q(x, 0)}{\partial t} = -C \Rightarrow \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = C\delta(t), \quad (2.93)$$

mentre per gli istanti $t > 0$ la (2.91) si esprime come:

$$D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - C \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t} = 0; \quad (2.94)$$

identica alla (2.76), già risolta nel precedente paragrafo.

La soluzione della (2.94) nel dominio della trasformata è già nota ed ha l'espressione generale:

$$U(x, t) = A \exp\left(\frac{Cx}{2D} - \frac{x}{2D} \sqrt{C^2 + 4Ds}\right) + B \exp\left(\frac{Cx}{2D} + \frac{x}{2D} \sqrt{C^2 + 4Ds}\right),$$

nella quale tenendo conto della terza delle (2.92) deve risultare $B = 0$ e quindi:

$$U(x, t) = A \exp\left(\frac{Cx}{2D} - \frac{x}{2D} \sqrt{C^2 + 4Ds}\right). \quad (2.95)$$

Per determinare la costante A , si può a questo punto utilizzare l'espressione (2.93), e quindi tenendo conto delle proprietà della Trasformata di Laplace e ricordando che la (2.93) deve valere per tutte le x compresa $x = 0$ si ha:

$$A \cdot s \cdot \exp\left(\frac{Cx}{2D} - \frac{x}{2D} \sqrt{C^2 + 4Ds}\right) = C \Rightarrow A = \frac{C}{s}.$$

La soluzione finale è dunque:

$$U(x, t) = \frac{C}{s} \exp\left(\frac{Cx}{2D} - \frac{x}{2D} \sqrt{C^2 + 4Ds}\right). \quad (2.96)$$

Per calcolare l'*Anti-Trasformata* della (2.96), e quindi esprimere la soluzione nel dominio del tempo, si può adottare lo stesso cammino di integrazione Λ di Fig.3.3. Questa volta però la soluzione presenta un polo nel punto $s = 0$. Quindi, per il *Teorema dei Residui* (Arfken & Weber 1994), la trasformata inversa vale:

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{k-\lambda i}^{k+\lambda i} e^{st} U(x, s) ds = \text{Res}(U(x, s); s = 0) - \frac{1}{2\pi i} \lim_{\substack{\rho \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{\Lambda} e^{\text{Re}^{i\theta} t} U(x, \text{Re}^{i\theta}) d\Lambda. \quad (2.97)$$

Nella (2.97) il residuo nel polo $s = 0$ ($\text{Res} f(s = 0)$), può essere calcolato utilizzando l'espressione:

$$\text{Res} f(s = 0) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{C}{s} \exp\left(\frac{Cx}{2D} - \frac{x}{2D} \sqrt{C^2 + 4Ds}\right) \right] = C,$$

in quanto $s = 0$ è un polo semplice (molteplicità pari a uno).

A questo punto bisogna calcolare l'integrale al secondo membro della (2.97). Per quanto detto nel precedente paragrafo, si ha che gli integrali lungo C_1 , C_2 ed ε sono nulli, e l'espressione si riduce agli integrali lungo Γ_1 e Γ_2 , e quindi alla:

$$\frac{e^{\left(\frac{Cx}{2D}\right)}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(\rho+a)t} \sin(b\sqrt{\rho})}{(\rho+a)} d\rho; \quad (2.98)$$

Dove $a = C^2/4D$ e $b = x/\sqrt{D}$. Il calcolo dell'integrale al secondo membro della (2.98), è relativamente semplice, in quanto basta notare che:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{e^{\left(\frac{Cx}{2D}\right)}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(\rho+a)t} \sin(b\sqrt{\rho})}{(\rho+a)} d\rho \right] = - \frac{e^{\left(\frac{Cx}{2D}\right)}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-(\rho+a)t} \sin(b\sqrt{\rho}) d\rho = - \frac{d}{dt} I(x,t)$$

quindi la derivata rispetto al tempo della (2.98) coincide con l'opposto della soluzione ricavata in assenza di influssi laterali nel paragrafo precedente, di conseguenza la $Q(x,t)$ ha l'espressione:

$$Q(x,t) = C - C \int_0^t \frac{x}{\sqrt{4D\pi^3}} e^{-\frac{(x-Ct)^2}{2Dt}} = C(1 - F(t)); \quad (2.99)$$

Con

$$F(t) = \int_0^t \frac{x}{\sqrt{4D\pi^3}} e^{-\frac{(x-Ct)^2}{2Dt}}. \quad (2.100)$$

(Nota: la soluzione espressa dalla (2.100) è, di fatto, la *Funzione di Green* dell'equazione (2.90))

Si rimanda al 4.6 del seguente capitolo per il calcolo esplicito della (2.100).

3.9 SOLUZIONE ANALITICA PER L'EQUAZIONE DELL'ONDA CINEMATICA LINEARIZZATA.

I metodi basati sulla soluzione analitica dell'onda cinematica linearizzata non costituiscono un valido strumento per descrivere la propagazione delle onde di piena nei canali a pelo libero. La soluzione analitica dell'onda cinematica linearizzata è comunque di grande interesse in quanto costituisce il punto di partenza di uno dei modelli più utilizzati per il calcolo del ruscelamento superficiale (*Run-off*), conosciuto come metodo della corrivazione.

Il modello cinematico linearizzato è descritto dalla seguente equazione:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c_k \frac{\partial Q}{\partial x} = 0; \quad (2.101)$$

Dove c_k è costante.

Considerato il seguente “set” di condizioni iniziali e al contorno:

$$\begin{cases} Q(0,t) = \delta(t) \\ Q(x,0) = 0 \end{cases}, \quad (2.102)$$

Applicando la trasformata di Laplace all’equazione (2.101) e tenendo conto della seconda delle (2.102) si ha:

$$sU + c_k \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (2.103)$$

La soluzione generale della (2.103) è del tipo

$$U(x,s) = a \cdot e^{-s \frac{x}{c_k}}. \quad (2.104)$$

Per la prima delle (2.102) deve risultare che $U(0,s) = 1$, e quindi $a = 1$.

La (2.104) può essere vista come un esponenziale complesso che moltiplica la Trasformata di una *Delta di Dirac*. Quindi per le proprietà di traslazione dell’*Anti-Trasformata*, l’immagine nel dominio del tempo $Q(x,t)$ deve essere:

$$Q(x,t) = \delta\left(t - \frac{x}{c_k}\right) = \delta(t - t_c) \quad \text{con} \quad t_c = \frac{x}{c_k}. \quad (2.105)$$

In sostanza, per il modello dell’onda cinematica linearizzata, la perturbazione sulla portata, uscente dalla generica sezione posta a distanza x dall’origine, è pari alla perturbazione in ingresso al canale, traslata nel tempo di una quantità $t_c = x/c_k$. Nel *Metodo della Corrivazione*, tale quantità corrisponde al tempo di *Tempo di Corrivazione* ed in genere è valutata tramite note formule empiriche (*Pasini, Turazza, ecc.*).

4 METODI RISOLUTIVI PER I MODELLI DI PROPAGAZIONE DELLE PIENE NEI CANALI A PELO LIBERO.

Nel capitolo precedente si è proceduto all'esposizione sia del problema generale del moto monodimensionale, ricavandone le equazioni di base, sia alla determinazione, tramite linearizzazione o/e semplificazione, dei vari modelli che da esse ne derivano. Nel presente capitolo vengono esposti i vari metodi risolutivi, presi in considerazione nel presente lavoro, ed i motivi per i quali si è deciso o meno di impiegare un determinato modello per lo svolgimento dei calcoli. Si fa presente che l'obiettivo è quello di individuare metodi risolutivi che da un lato permettano di descrivere tutti i fenomeni che si realizzano nel moto vario delle correnti a pelo libero (risalti idraulici, passaggio da correnti lente a veloci, passaggio da corrente a superficie libera a correnti in pressione ecc.), dall'altro lato consenta calcoli rapidi in quanto tali metodi dovranno servire per la soluzione del problema idraulico della rete all'interno dell'algoritmo di ottimizzazione. Quest'ultima caratteristica assume un ruolo determinante per il fatto che ad ogni passo del processo di ottimizzazione devono essere effettuate simulazioni di moto vario, per un determinato numero di reti, all'interno di un approccio variazionale che consenta di determinare le condizioni peggiori rispetto alle quali effettuare la progettazione ottimizzata delle reti oggetto di studio. Quindi se N_o è il numero di passi del processo di ottimizzazione, N_i è il numero di reti, dotate di diversa geometria, generate dall'ottimizzatore ad ogni passo, N_d è il numero di durate di pioggia prese a riferimento per l'approccio variazionale, il numero complessivo di simulazioni idrauliche da effettuare nel processo di ottimizzazione sarà $N_s = N_o \times N_i \times N_v$. Assegnando alle suddette quantità valori tipici di un processo di ottimizzazione si ottiene:

$$N_s = N_o \times N_i \times N_v \approx 500 \times 300 \times 30 = 4500000;$$

che da l'idea del numero di simulazioni da effettuare ad ogni processo.

Per tale motivo, nel presente capitolo, dopo un esame di alcuni metodi risolutivi tra i più comuni, è stato sviluppato, a partire dal lavoro originale di *Todini* (1986), un metodo di calcolo semplice, accurato ed di basso costo computazionale, in grado di

descrivere tutti i fenomeni legati al passaggio di un'onda di piena all'interno di una rete di drenaggio (presenza di più risalti idraulici lungo il percorso, regime misto corrente veloce/lenta e/o lenta/veloce, passaggio da corrente a superficie libera a correnti in pressione ecc.).

4.1 II METODO ALLE DIFFERENZE FINITE PER IL SISTEMA COMPLETO.

A partire dalla seconda metà del secolo scorso, grazie soprattutto allo sviluppo ed alla diffusione commerciale dei calcolatori elettronici, si è fatto largo uso delle tecniche numeriche per la soluzione di EDP (equazioni alle derivate parziali) ed, in particolare, nei problemi di idrodinamica, il “*metodo alle differenze finite*” (FDM) è stato largamente impiegato sia per la realizzazione di software commerciali e gratuiti (HEC-RAS, EPASWIMM ecc.), sia a scopi di ricerca.

Tale metodo si basa sull'ipotesi che le variabili dipendenti del problema siano, con le loro derivate parziali, continue fino all'ordine necessario (pari in genere all'ordine dell'EDP che si sta risolvendo). Per tale motivo il FDM non è in grado di portare in conto problemi di risalto idraulico ed in tali circostanze, quindi, si ricorre a delle semplificazioni (Fread *et al.* 1996) come sarà mostrato di seguito.

Considerate le generiche funzioni $f(x + \Delta x, t)$ o $f(x - \Delta x, t)$ continue e derivabili, con derivate continue fino all'ordine necessario, esse sono sviluppabili in serie di *Taylor* rispetto a Δx intorno al punto $\Delta x = 0$ ottenendo:

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, t) &\approx f(x, t) + \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \cdot \Delta x + err \\ f(x - \Delta x, t) &\approx f(x, t) - \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \cdot \Delta x + err \end{aligned} \quad ; \quad (4.1)$$

Dove con *err* è stato indicato l'errore che si ottiene nel trascurare i termini di ordine superiore al primo.

Trascurando l'errore nelle (3.1) e risolvendo per la derivata prima si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} &\approx \frac{f(x + \Delta x, t) - f(x, t)}{\Delta x} \\ \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} &\approx \frac{f(x, t) - f(x - \Delta x, t)}{\Delta x} \end{aligned} \quad ; \quad (4.2)$$

Che rappresentano delle approssimazioni per le derivate di una generica funzione considerando, rispettivamente, il rapporto incrementale in avanti e in dietro.

Procedendo in maniera analoga è possibile ricavare approssimazioni per le derivate di ordine superiore e per le derivate miste.

Fissati un passo spaziale Δx ed uno temporale Δt costanti, indicati i generici nodi del reticolo spazio-tempo con gli indici i e j rispettivamente, le (2.25) diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{A_i^{j+1} - A_i^j}{\Delta t} + \frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}}{\Delta x} = \frac{1}{2} (q_{i+1}^{j+1} + q_i^{j+1}) \\ \frac{h_{i+1}^{j+1} - h_i^{j+1}}{\Delta x} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(gA)_{i+1}^{j+1}} + \frac{1}{(gA)_i^{j+1}} \right) \frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}}{\Delta t} + \\ + \frac{\left(\frac{Q^2}{A} \right)_{i+1}^{j+1} - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_i^{j+1}}{\Delta x} = i - \frac{1}{2} (J_i^{j+1} + J_{i+1}^{j+1}) \end{array} \right. \quad (4.3)$$

In pratica l' FDM trasforma un sistema di EDP in un sistema algebrico, nel quale compaiono, come incognite, non solo le quantità nel i -esimo nodo spaziale, valutate nel nodo temporale $(j+1)$, ma anche quelle del nodo spaziale $i+1$ adiacente. Si capisce dunque che se N è il numero complessivo di nodi spaziali, il sistema algebrico che si ottiene è costituito da $2 \times N$ equazioni, con $2 \times N + 2$ incognite, e quindi il pareggio tra equazioni ed incognite è ottenuto mettendo a sistema le condizioni al contorno.

Nelle (4.3) le derivate temporali sono state espresse rispetto al nodo spaziale i -esimo, mentre le derivate spaziali rispetto al nodo temporale $j+1$ -esimo, invece i coefficienti ed i termini noti sono stati mediati nello spazio ma comunque valutati al nodo temporale $j+1$, ottenendo in questo modo uno schema numerico completamente implicito.

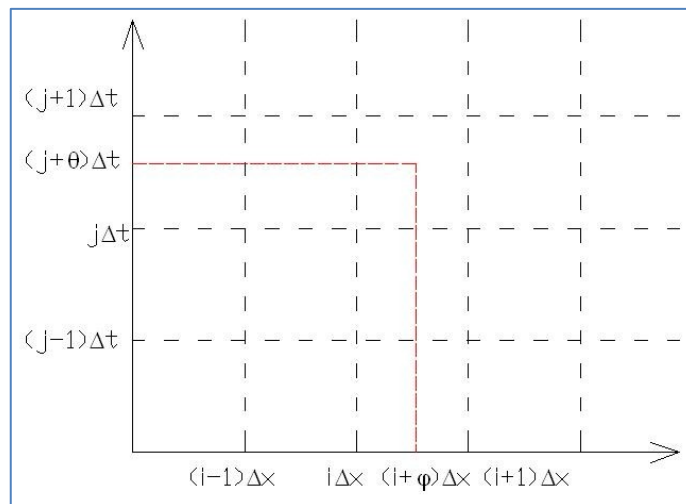


Fig.4.1 Schema Preissmann a quattro punti.

Lo schema numerico sintetizzato nelle (4.3) non è molto diffuso, ma viene in genere utilizzata una variante di esso detta “*Schema Preissmann a quattro punti*”. Tale schema consiste concettualmente nel mediare le funzioni all’interno del rettangolo spazio-temporale formato dai quattro nodi del reticolo di discretizzazione (Fig.3.1).

Detti θ e φ rispettivamente i pesi delle quantità valutate al nodo temporale $j+1$ e al nodo spaziale $i+1$ l’equazione di continuità nelle (4.3) diventa:

$$\begin{aligned} & \varphi \frac{A_{i+1}^{j+1} - A_{i+1}^j}{\Delta t} + (1-\varphi) \frac{A_i^{j+1} - A_i^j}{\Delta t} + \theta \frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}}{\Delta x} + \\ & (1-\theta) \frac{Q_{i+1}^j - Q_i^j}{\Delta x} = \theta (\varphi q_{i+1}^{j+1} + (1-\varphi) q_i^{j+1}) + (\theta-1) (\varphi q_{i+1}^j + (1-\varphi) q_i^j) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Invece l’equazione del moto si modifica in:

$$\begin{aligned} & \theta \frac{h_{i+1}^{j+1} - h_i^{j+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{h_{i+1}^j - h_i^j}{\Delta x} + \varphi \left(\frac{\theta}{(gA)_{i+1}^{j+1}} + \frac{(1-\theta)}{(gA)_{i+1}^j} \right) \frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}}{\Delta t} + \\ & + (1-\varphi) \left(\frac{\theta}{(gA)_i^{j+1}} + \frac{(1-\theta)}{(gA)_i^j} \right) \frac{Q_i^{j+1} - Q_i^j}{\Delta t} + \\ & + \theta \left(\frac{\varphi}{(gA)_{i+1}^{j+1}} + \frac{(1-\varphi)}{(gA)_i^{j+1}} \right) \frac{\left(\frac{Q^2}{A} \right)_{i+1}^{j+1} - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_i^{j+1}}{\Delta x} + \\ & + (1-\theta) \left(\frac{\varphi}{(gA)_{i+1}^j} + \frac{(1-\varphi)}{(gA)_i^j} \right) \frac{\left(\frac{Q^2}{A} \right)_{i+1}^j - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_i^j}{\Delta x} \\ & = i - \theta ((1-\varphi) J_i^{j+1} + \varphi J_{i+1}^{j+1}) + (1-\theta) ((1-\varphi) J_i^j + \varphi J_{i+1}^j) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Anche in questo caso le incognite sono le quantità valutate al nodo temporale $j+1$, in corrispondenza dei nodi spaziali i ed $i+1$. La (4.4) insieme alla (4.5) genera un sistema algebrico non lineare, quindi sono necessarie tecniche numeriche per la risoluzione sistemi di equazioni non lineari, come ad esempio il metodo di *Newton-Raphson*, che, notoriamente, richiede ad ogni iterazione la soluzione di un sistema algebrico lineare. La matrice associata a quest’ultimo, per il fatto che le equazioni scritte per il nodo spaziale i contengono incognite nei nodi spaziali adiacenti, è fortemente sparsa, quindi è opportuno utilizzare, ad ogni iterazione del metodo di *Newton-Raphson*, metodi di risoluzione di sistemi lineari a memoria compatta nei quali vengono memorizzati solo i termini diversi da zero delle matrici in maniera tale da evitare inutili operazioni sugli zeri (*Teukolsky et al. 1992, Gupta et al 1977*).

Il FDM sfortunatamente non consente di trattare problemi di risalto idraulico. In tale evenienza è possibile utilizzare con successo il metodo “*Local Partial Inertia*” (Fread *et al.* 1996). Tale metodo consiste nel filtrare i termini inerziali nella (4.5), moltiplicandoli per un coefficiente σ , che assume valori compresi tra $[0,1]$. Nel celebre programma *HEC-RAS*, tale metodo è utilizzato nell’ipotesi che le correnti siano lente (condizioni al contorno nella sezione più a valle), assegnando valore nullo al coefficiente σ quando il numero di *Froude* eccede l’unità, quindi la (4.4) e la (4.5) si riducono al sistema di equazioni del modello parabolico. In tal modo è sufficiente una sola condizione al contorno poiché il modello parabolico, avendo due caratteristiche reali e coincidenti, necessita di una condizione al contorno assegnata in un solo punto. Nel presente lavoro si è deciso di scartare un tale modello per l’ottimizzazione, in quanto esso richiede la soluzione di un sistema non lineare ad ogni passo temporale, ma può essere comunque utilizzato per testare il modello, che in seguito saranno descritti, utilizzando il noto programma *HEC-RAS*.

4.2 II METODO ALLE DIFFERENZE FINITE PER IL MODELLO CINEMATICO.

L’ FDM, descritto nel paragrafo precedente, può essere utilizzato in maniera soddisfacente per risolvere il modello cinematico.

Moltiplicando l’equazione di continuità delle (2.26) per ∂x si ottiene:

$$\frac{\partial A \cdot \partial x}{\partial t} + dQ = \frac{dV}{dt} + dQ = 0, \quad (4.6)$$

Dove V è il volume accumulato nel tratto di lunghezza dx . A questo punto si applica la tecnica di discretizzazione, di cui al precedente capitolo, pervenendo a (Biggiero & Pianese 1995):

$$V^{j+1} - V^j + \theta \cdot (Q_{n+1}^{j+1} - Q_n^{j+1}) \cdot \Delta t + (1 - \theta) \cdot (Q_{n+1}^j - Q_n^j) \cdot \Delta t = 0, \quad (4.7)$$

Dove si è attribuito agli indici n e j , rispettivamente, il nodo spaziale e quello temporale.

Lo schema numerico definito dalla (4.7) è incondizionatamente stabile. Infatti, poiché nella (4.7) le portate possono essere legate ai volumi invasati tramite le seguente approssimazione:

$$\frac{V^{j+1}}{\Delta t} \approx \theta(Q_{n+1}^{j+1} + Q_n^{j+1}), \quad (4.8)$$

Si può eseguire un'analisi di stabilità di *Von Neumann*. Indicando con S_n^j la soluzione numerica a precisione infinita della (4.7), con r_n^j l'errore ai passi temporali e spaziali n e j , lo zero macchina si ottiene sostituendo $S_n^j + r_n^j$ nella (4.7), previa sostituzione dell'approssimazione (4.8). Ricordando che per S_n^j la (4.7) deve essere nulla, si perviene a:

$$\theta \cdot r_{n+1}^{j+1} - (1 - \theta) \cdot r_n^j = 0. \quad (4.9)$$

Esprimendo l'errore mediante uno sviluppo in *serie di Fourier*, essendo la (4.9) un'espressione lineare, si può prendere in considerazione la singola armonica della serie ed applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. La singola armonica (utilizzando l'esponenziale complesso), presenta l'espressione $r_n^j = \eta^j e^{i\alpha n}$.

η^j rappresenta l'ampiezza dell'errore al passo temporale j , mentre l'esponenziale complesso, legato alla fase α , che dipende dal punto spaziale, rappresenta l'oscillazione degli errori nei vari punti spaziali.

Sostituita tale espressione nella (4.9) si giunge alla

$$\theta \cdot \eta^{j+1} e^{i\alpha(n+1)} - (1 - \theta) \cdot \eta^j e^{i\alpha n} = 0, \quad (4.10)$$

dalla quale si ottiene $\eta = (1 - \theta) / \theta \cdot e^{-i\alpha}$. Per la stabilità dello schema numerico (3.7) è richiesto che il valore assoluto rapporto tra l'errore al passo $j+1$ e quello al passo j sia limitato come segue:

$$\left| \frac{r_n^{j+1}}{r_n^j} \right| = \left| \frac{\eta^{j+1} e^{i\alpha(n+1)}}{\eta^j e^{i\alpha n}} \right| = |\eta| = \left| \frac{(1 - \theta)}{\theta} \cdot e^{-i\alpha} \right| = \frac{(1 - \theta)}{\theta} |\cos \alpha - i \sin \alpha| = \frac{(1 - \theta)}{\theta} \leq 1, \quad (4.11)$$

E quindi per valori di $\theta \geq 0.5$ lo schema definito dalla (4.7) è incondizionatamente stabile per qualunque scelta del passo temporale e del passo spaziale, in quanto nell'espressione dell'ampiezza dell'errore non appare nessuna dipendenza né da Δx né da Δt . In conclusione, il metodo appena esposto, consente la scelta di passi spaziali e temporali molto ampi, riducendo quindi i tempi di calcolo per le simulazioni idrauliche. Tuttavia, il metodo appena descritto, non consente una trattazione completa dei fenomeni di moto vario, in quanto l'ipotesi di moto uniforme, che è alla base del modello matematico, non consente di descrivere il fenomeno dei tiranti idrici rigurgitati da valle. Inoltre laddove i canali abbiano deboli pendenze, è richiesto, affinché il

modello dia risultati attendibili, che gli idrogrammi di piena evolvano molto lentamente (Ponce & Simons 1978). Si è scelto comunque di utilizzare tale modello numerico, sia per il fatto che esso viene largamente impiegato in letteratura tecnica per l'ottimizzazione delle reti di drenaggio (Afshar et al 2006) e per la verifica delle stesse (ILLUDAS, EPASWIM), sia perché è legato (concettualmente) a modelli semplificati di largo impiego in campo tecnico, come il metodo dell'invaso italiano.

4.3 II METODO AI VOLUMI FINITI (FVM).

In letteratura tecnica, nell'ultimo decennio, per quanto riguarda la soluzione numerica delle equazioni del moto complete, si è fatto largo uso del “Metodo ai Volumi Finiti”. I punti di forza di tale metodo risolutivo stanno, oltre che nella facilità di implementazione, nella sua capacità di portare in conto fenomeni di “shock”, ovvero nella possibilità di trattare salti di discontinuità delle variabili dipendenti delle equazioni del moto e quindi risalti idraulici lungo il percorso.

Il punto di partenza è la scrittura in forma conservativa delle equazioni del moto, ovvero la (2.16) viene scritta sotto forma di legge di conservazione come segue:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} = S. \quad (4.12)$$

Nella (3.12) $U = [A, Q]^T$ rappresenta il vettore delle quantità conservate; mentre $f(U) = [Q, gI + Q^2/A]^T$ è il vettore dei flussi delle quantità conservate, nel quale $I = \int_0^h \rho g(h-y)B(y)dy$; $S = [0, gA(i-J)]^T$ rappresenta i termini sorgente.

Considerata una generica cella di lunghezza Δx , indicato con x_i il suo centro, si integra la (4.12) nello spazio e nel tempo ottenendo

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t_{n+1}) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t_n) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} [F(x_{i+1/2}, t) - F(x_{i-1/2}, t)] dt + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} S(x, t) dt dx; \quad (4.13)$$

Per la quale, viene utilizzato uno schema numerico del tipo:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n] + \bar{S}_i. \quad (4.14)$$

Il termine U_i^n , nella (3.14), denota un'approssimazione della media della soluzione sulla cella j al tempo t_n , mentre $F_{i\pm 1/2}^n$, che approssima l'integrale del flusso

all'interfaccia della cella, è il cosiddetto flusso numerico e dipende dalle soluzioni del *Problema di Riemann* nelle celle che condividono il punto $x_{i\pm 1/2}$.

Lo schema numerico definito dalla (4.14), è alla base del metodo di “*Godunov*”. Tale metodo si basa sull'idea secondo cui la soluzione viene ricostruita, ad ogni istante temporale, a partire dalle medie di cella come funzioni di x costanti a tratti. Inoltre, la soluzione del sistema iperbolico, per funzioni costanti a tratti e per piccoli istanti di tempo, può essere calcolata attraverso una successione di “*problemi di Riemann*”.

Un “*problema di Riemann*” è un “*problema di Cauchy*” per un sistema di leggi di conservazione, dove la condizione iniziale presenta un salto di discontinuità. La soluzione del *problema di Riemann* è legata all'andamento delle curve caratteristiche del problema in esame (per maggiori dettagli si veda *Le Veque* 2002). In genere, per problemi relativi al moto vario delle correnti a pelo libero, la soluzione del problema di *Riemann* presenta una struttura del seguente tipo:

$$F_{i\pm 1/2}^n = \begin{cases} F_L & \text{se } s_L > 0 \\ F_R & \text{se } s_R < 0 \\ F^* & \text{se } s_L < 0 < s_R \end{cases}$$

Dove $s_L = \min(c_{i-1}^-, c_i^-)$ è la più piccola tra le celerità di propagazione negative calcolate nella cella i e nella cella $i-1$; $s_R = \max(c_i^+, c_{i+1}^+)$ è la maggiore tra le celerità calcolate nella cella i e nella cella $i+1$; F_L ed F_R si indicano, rispettivamente, i flussi a sinistra e a destra dell'interfaccia della cella i -esima nei punti $x_{i\pm 1/2}$, mentre F^* è il flusso nella regione intermedia, ovvero, quella compresa tra due curve caratteristiche.

Tale flusso non è sempre noto analiticamente, in particolare può essere determinato in forma chiusa per equazioni scalari e per alcuni sistemi di leggi di conservazione di grande interesse fisico, come nel caso della *gas-dinamica*. In generale richiede la soluzione di un sistema di equazioni non lineare (per un maggiore approfondimento dell'argomento si rimanda a *Le Veque* 2002 e *Toro* 1999). Ma come si può notare, la (4.14), è uno schema completamente esplicito, quindi non avrebbe senso utilizzare un tale schema e, comunque, dover effettuare delle iterazioni per risolvere un sistema non lineare. Nella pratica, infatti, si ricorre ai cosiddetti “*Solutori di Riemann approssimati*”. Tali solutori consentono di ottenere F^* direttamente in forma esplicita. Uno dei solutori più utilizzati nella pratica è il solutore *HLL* (*Harten, Lax & Van Leer*), per il quale

$$F^* = \frac{s_R \cdot F_L - s_L \cdot F_R + s_R \cdot s_L \cdot (U_R - U_L)}{s_R - s_L}. \quad (4.15)$$

Il metodo appena descritto consente di risolvere completamente e in maniera soddisfacente, il problema del moto nelle correnti a pelo libero, consentendo la trattazione di risalti idraulici e quindi il passaggio da correnti veloci a correnti lente, senza dover effettuare delle semplificazioni all'interno del sistema di equazioni originario. Nonostante ciò, si è deciso di non utilizzare l'FVM in un'ottica di ottimizzazione, poiché il numero di passi temporali necessari a simulare la propagazione di un'onda di piena, generata da un evento di pioggia, risulterebbe essere eccessivo. Infatti per la convergenza dello schema definito dalla (4.14) è richiesto che:

$$\left| c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1 \quad \text{con} \quad c = \max(v + \sqrt{gh_m}, v - \sqrt{gh_m}); \quad (4.16)$$

cioè che sia rispettata la condizione di *Courant*.

Il rispetto di tale condizione impone che per $\Delta x = 5m \div 10m$ si abbiano, approssimativamente, passi temporali $\Delta t = 0.5s \div 2.5s$ per correnti veloci e $\Delta t = 2s \div 5s$ circa per le correnti lente, mentre si ha l'esigenza (al fronte di idrogrammi di piena di durata superiore all'ora), di dover simulare alcune ore di moto vario, e dunque i tempi richiesti da un processo di ottimizzazione sarebbero eccessivamente lunghi.

4.4 LO SCHEMA CPM (COMPLETE PARABOLIC MODEL).

Nella letteratura tecnica sono presenti numerosi lavori sulla capacità dell'*Onda Diffusiva* di descrivere la propagazione dell'onda di piena (Hayami 1951, Ponce 1978, Dooge 1983, Singh 1994, Singh 1995, Fread 1996, Moussa 1996, Bajracharya 1997).

Effettuando una classica analisi di stabilità di *Von Neumann* su uno schema numerico, basato sul modello dell'*Onda Parabolica*, si può dimostrare che essa genera schemi impliciti dotati di instabilità incondizionata. In virtù di questo fatto, schemi alle differenze finite impliciti costruiti sul modello parabolico, consentirebbero di utilizzare passi spaziali e temporali molto ampi, e quindi ridurre i tempi di calcolo drasticamente. Inoltre, poiché il modello in questione, possiede due curve caratteristiche reali e coincidenti, non vi è distinzione tra correnti *subcritiche* e *supercritiche*, quindi, uno

schema alle differenze finite risulterebbe sufficiente al fine di simulare, in maniera approssimata, la presenza di uno o più risalti idraulici lungo il percorso.

Uno schema di tipo implicito richiederebbe, in ogni caso, la risoluzione di un sistema non lineare ad ogni passo temporale.

Come mostrato in 3.7 e 3.8, per il *modello parabolico linearizzato* è possibile ricavare una soluzione analitica per un impulso unitario come condizione al contorno, ovvero una risposta all'impulso unitario. A partire da tale risposta impulsiva, si può costruire un modello molto efficace (Bossi & Todini 1986), esprimendo la risposta ad ogni tipo di ingresso, mediante un *integrale di convoluzione*. Originariamente, un tale modello, è stato sviluppato da Todini (1986), ma solo per correnti lente, senza considerare la possibilità che, all'interno di reti fognarie, il moto a pelo libero, possa trasformarsi in moto in pressione.

Dalla linearizzazione dell'onda diffusiva, è possibile ricavare, come già visto nel capitolo precedente, un'equazione del tipo:

$$D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - C \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t} = 0; \quad (4.18)$$

La (4.18) rappresenta la cosiddetta equazione *Convettiva-Diffusiva* linearizzata a partire da uno stato di riferimento stazionario. In essa C e D sono costanti all'interno del passo temporale e, come già mostrato in 3.7, è possibile ricavare analiticamente la risposta ad un impulso unitario in ingresso al sistema, espressa da una *Delta di Dirac*, ottenendo una funzione di trasferimento del tipo:

$$u_{\Delta x}(t) = \frac{\Delta x}{\sqrt{4Dt^2\pi}} e^{-\frac{(ct-\Delta x)^2}{4Dt}}. \quad (4.19)$$

Per ogni tratto di lunghezza Δx la (4.19) fornisce, al tempo t , la portata in uscita dovuta ad un ingresso impulsivo nella sezione a monte del tratto. Pertanto la portata in uscita dal tratto al tempo t può essere espressa in termini di portata immessa $Q(x,t)$ come:

$$Q(x + \Delta x, t) = \int_0^t Q(x, \tau) u_{\Delta x}(t - \tau) d\tau. \quad (4.20)$$

Se l'incremento è improvviso, quindi assimilabile ad una "*Distribuzione di Heavyside*" (come nel caso dall'apertura improvvisa di una paratoia, o del dam-break), meglio nota come funzione a gradino unitario, la (4.20) può essere integrata nel tempo e dare (si veda 4.6):

$$U_{\Delta x}(i) = \int_{\tau}^{\tau+\Delta t} \frac{\Delta x}{\sqrt{4\pi D \eta}} e^{-\frac{(\Delta x - C\eta)^2}{4D\eta}} d\eta = F(\tau + \Delta\tau) - F(\tau); \quad (4.20)$$

dove

$$F(\tau) = N\left(-\frac{\Delta x - C\tau}{\sqrt{2D\tau}}\right) + e^{\frac{\Delta x C}{D}} N\left(-\frac{\Delta x + C\tau}{\sqrt{2D\tau}}\right) \quad (4.21)$$

e con

$$N(\bullet) = \int_{-\infty}^{\bullet} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \quad (4.22)$$

che rappresenta la nota *Distribuzione normale standard*.

La portata uscente diventa dunque:

$$Q(x + \Delta x, k) = \sum_{i=1}^k Q(x, k - i + 1) U_{\Delta x}(i), \quad (4.23)$$

dove k è il k -esimo Δt .

Nelle pratiche applicazioni, solitamente, l'*integrale di convoluzione* viene discretizzato ipotizzando che in ogni intervallo Δt , le funzioni che esprimono l'ingresso e l'uscita assumano valore costante. Infatti gli idrogrammi di piena sono noti per punti, ovvero per alcuni istanti temporali ben precisi. Quindi, di solito, l'idrogramma viene approssimato considerando costanti nel Δt i valori della portata, assumendo una forma simile a quella di un istogramma. Di conseguenza l'idrogramma può essere visto come un "*Treno Di Impulsi Rettangolari*" (o "*Treno Di Onde Rettangolari*"), e dunque, al fine di determinare la risposta ad un idrogramma qualsiasi, potrebbe essere utilizzato un *integrale di convoluzione* nel quale in luogo della risposta all'impulso unitario, venga utilizzata la risposta all' "*Onda Rettangolare Unitaria*". Se l'espressione di tale integrale è nota a priori, nelle pratiche applicazioni esso può essere sostituito da una sommatoria (si veda 4.6). L'espressione di tale integrale è legata al valore medio della curva S tra t e Δt :

$$\bar{U}(i) = \bar{F}(t) - \bar{F}(t - \Delta t); \quad (4.23)$$

con

$$\bar{F}(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_0^{\eta} \frac{\Delta x}{\sqrt{4\pi D \xi^3}} e^{-\frac{(\Delta x - C\xi)^2}{4D\xi}} d\xi = \frac{1}{\Delta t} \cdot [IF(\tau + \Delta t) - IF(\tau)]. \quad (4.24)$$

E quindi l'espressione finale della (4.23) assume la seguente forma:

$$\bar{U}_{\Delta x}(i) = \frac{[IF(\tau + \Delta t) - 2IF(\tau) + IF(\tau - \Delta t)]}{\Delta t}; \quad (4.25)$$

dove

$$IF(\tau) = \left(\tau - \frac{\Delta x}{C} \right) N \left(-\frac{\Delta x - C\tau}{\sqrt{2D\tau}} \right) - \left(\tau + \frac{\Delta x}{C} \right) e^{\frac{\Delta x C}{D}} N \left(-\frac{\Delta x + C\tau}{\sqrt{2D\tau}} \right) \quad (4.26)$$

Nell'paragrafo 4.6, sull'integrazione, viene fornita un' approssimazione polinomiale della $N(\bullet)$ per facilitare il calcolo della (4.26).

La portata in uscita dal generico tratto di lunghezza Δx al k -esimo passo temporale (dove con k -esimo passo temporale, si intende l'istante $t + \Delta t$), è data dalla:

$$Q(x + \Delta x, k) = Q(x + \Delta x, 0) + \sum_{i=1}^k Q(x, k - i + 1) \bar{U}_{\Delta x, k}(i); \quad (4.27)$$

dove $Q(x, \bullet)$, rappresenta il disturbo, rispetto alla portata iniziale, in ingresso al tratto di lunghezza Δx .

Quanto sin ora mostrato, è relativo solo alla propagazione della portata nelle varie sezioni in cui è stato discretizzato il canale. Per il calcolo dei tiranti idrici nelle stesse, si procede al calcolo di un profilo di moto permanente utilizzando il bilancio dell'energia tra due sezioni contigue che, notoriamente, è espresso dall'equazione di *Bernoulli*:

$$z_{x-\Delta x} + h_{x-\Delta x} + \frac{Q_{x-\Delta x}^2}{2gA_{x-\Delta x}^2} = z_x + h_x + \frac{Q_x^2}{2gA_x^2} + \Delta x J_{med}; \quad (4.28)$$

dove il termine tra parentesi quadre al secondo membro, rappresenta la cadente media dell'energia valutata con la formula di *Gauckler-Strickler*:

$$J_{med} = \frac{1}{2} \left[\frac{Q_x^2}{k^2 A_x^2 R_x^{4/3}} + \frac{Q_{x-\Delta x}^2}{k^2 A_{x-\Delta x}^2 R_{x-\Delta x}^{4/3}} \right]$$

La (4.27) può essere integrata facendo uso dello *Standard Step Method* (Chow 1959, Henderson 1959). Si fa presente che, procedere al calcolo di un profilo di moto stazionario non uniforme, per la determinazione dei tiranti idrici, nelle varie sezioni in cui è diviso il canale, è coerente con le ipotesi di base del CPM. Infatti, l'equazione (4.18), viene linearizzata rispetto ad uno stato di riferimento, considerando C e D costanti all'interno del passo temporale e del passo spaziale. Ad ogni istante k viene considerato un nuovo stato di riferimento, e quindi la (4.18) viene linearizzata intorno al nuovo stato semplicemente aggiornando i valori di C e D con riferimento alla distribuzione di portate e tiranti lungo le sezioni dei vari tratti della rete calcolate al k -

esimo istante temporale. Dunque il moto può essere visto come una successione di stati, istantaneamente e localmente stazionari, intorno ai quali linearizzare le equazioni del moto. Per tale ragione, il modello è stato denominato CPM (Complete Parabolic Model), in quanto approssima la soluzione dell'equazione non lineare (2.37), attraverso una successione di stati lineari.

Nel presente lavoro di tesi, si è fatto uso di una versione modificata rispetto allo schema PAB originale ideato da *Todini & Bossi* (1986). Tale modifica consiste nel calcolare i profili di moto stazionario con un algoritmo di tipo *Mixed-Flow* (*Molinas & Young* 1985), in modo da poter simulare, con lo schema fin ora esposto, regimi di corrente di tipo misto (veloce-lenta) e di poter trattare uno o più risalti idraulici lungo il percorso (si veda 4.8 per una trattazione dettagliata dell'algoritmo *Mixed-Flow*). Inoltre viene fatto uso della Preissmann Slot, nell'evenienza che il moto a pelo libero a moto in pressione, nei sistemi di fognatura.

Ricapitolando lo schema CPM è strutturato nei seguenti passi:

- a) Si fissa un Δt di calcolo e si suddividono i diversi tratti della rete in tanti sottotratti di lunghezza Δx , potendo questi ultimi differire da tratto a tratto in relazione alle specifiche esigenze di precisione dei calcoli da effettuare.
- b) Nota la distribuzione spaziale delle portate defluenti lungo i diversi tronchi del sistema e le condizioni al contorno relative ai livelli idrici o ai tiranti idrici al tempo t , si ricostruisce il profilo di corrente lungo i diversi elementi della rete, integrando nello spazio l'equazione di bilancio dell'energia nell'ipotesi di moto (istantaneamente) stazionario con portata variabile nello spazio.
- c) A partire dai profili di corrente e dalla conseguente conoscenza di B , $\partial B / \partial x$, $\partial J / \partial h$, $\partial J / \partial Q$ si valutano, tronco per tronco i valori (locali ed istantanei) di C e D (celerità e diffusività) che consentono unitamente alle condizioni al contorno sulle portate in ingresso al sistema, di valutare la nuova distribuzione spaziale delle portate all'istante $t + \Delta t$.
- d) Si reitera dai punti b) e c), fino all'istante preso a riferimento.

Lo schema di calcolo appena esposto, è dotato di stabilità incondizionata (in quanto basato su una soluzione analitica), e quindi consente l'utilizzazione di passi spaziali e temporali molto ampi, riducendo bruscamente i tempi di calcolo. In più, con le modifiche apportate nel presente lavoro, consente di trattare regimi di corrente misti (veloce-lenta), quindi il problema di più risalti idraulici lungo il percorso e con

l'impiego della *Preissmann Slot*, è possibile simulare, senza la necessità di modificare le equazioni di base, sia correnti a pelo libero che correnti in pressione.

In definitiva lo schema CPM è dotato di velocità di esecuzione dei calcoli, di una buona accuratezza e consente di descrivere il fenomeno del moto vario in quasi tutti i suoi aspetti (tirante rigurgitato da valle, regime di corrente misto veloce/lento, risalti idraulici lungo il percorso, passaggio da moto a pelo libero a moto in pressione ecc.). Per questi motivi si è scelto di impiegare il CPM in maniera soddisfacente, per le procedure di ottimizzazione delle reti di drenaggio.

4.5 LO SCHEMA CPM CON AFFLUSSI LATERALI.

La soluzione analitica dello schema CPM, di cui al paragrafo precedente, viene determinata nell'ipotesi di assenza di portate immesse lateralmente. Poiché esso è basato su un modello matematico lineare, si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, e quindi determinare la portata in uscita dai vari tratti di lunghezza Δx , in cui ogni singolo collettore è stato suddiviso, come somma di due integrali di convoluzione, uno relativo alle perturbazioni che si propagano dalle sezioni a monte verso quelle di valle, già definito nel paragrafo precedente, ed uno relativo alle portate uniformemente distribuite che si immettono lateralmente al collettore.

Dalla linearizzazione dell'onda diffusiva con influssi laterali si ottiene un'equazione del tipo:

$$D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = C \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} - Cq, \quad (4.29)$$

La cui soluzione analitica, ottenuta con le condizioni al contorno definite in 3.8, è del tipo:

$$ul_{\Delta x}(t) = C \cdot \left\{ 1 - N\left(-\frac{\Delta x - Ct}{\sqrt{2Dt}}\right) + \exp\left(\frac{\Delta x C}{D}\right) \cdot N\left(-\frac{\Delta x + Ct}{\sqrt{2Dt}}\right) \right\} = C \cdot [1 - F(t)]. \quad (4.30)$$

Se si estende lo stesso ragionamento fatto nel paragrafo precedente, per la determinazione dell'espressione analitica dell' *integrale di convoluzione*, il problema è quello di determinare la forma discreta della risposta ad un ingresso laterale di forma rettangolare. Poiché la forma continua della risposta all' *onda rettangolare* è:

$$UL_{\Delta x} = \frac{G(t) - G(t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad (4.31)$$

dove

$$G(t) = \int_0^t ul_{\Delta x}(\gamma) d\gamma = C \left\{ t - \left[\left(t - \frac{\Delta x}{C} \right) N \left(\frac{-\Delta x + Ct}{\sqrt{2Dt}} \right) - \left(t + \frac{\Delta x}{C} \right) e^{\frac{\Delta x C}{D}} N \left(\frac{-\Delta x - Ct}{\sqrt{2Dt}} \right) \right] \right\}.$$

Ne segue che la forma discreta della funzione $UL_{\Delta x}$ è:

$$\bar{UL}_{\Delta x}(i) = \bar{UL}_{\Delta x}(t \div t + \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} UL_{\Delta x}(\gamma) d\gamma = \frac{1}{\Delta t} (\bar{G}(t + \Delta t) - \bar{G}(t)) \quad (4.32)$$

nella quale:

$$\bar{G}(t) = \int_0^t UL_{\Delta x}(\gamma) d\gamma. \quad (4.33)$$

Quindi la (4.32) diventa:

$$\bar{UL}_{\Delta x}(i) = \frac{1}{\Delta t} [(IG(t + \Delta t) - IG(t)) - (IG(t) - IG(t - \Delta t))]; \quad (4.34)$$

dove

$$IG(t) = \int_0^t G(\gamma) d\gamma = \frac{C}{2} \left\{ t^2 - \left(t^2 + \frac{\Delta x^2}{C^2} \right) \left[N \left(-\frac{\Delta x - Ct}{\sqrt{2Dt}} \right) + e^{\frac{\Delta x C}{D}} N \left(-\frac{\Delta x + Ct}{\sqrt{2Dt}} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{2\Delta x}{C} \left(t - \frac{D}{C^2} \right) \left[N \left(-\frac{\Delta x - Ct}{\sqrt{2Dt}} \right) - e^{\frac{\Delta x C}{D}} N \left(-\frac{\Delta x + Ct}{\sqrt{2Dt}} \right) \right] + \frac{2\Delta x}{C^2} \sqrt{\frac{Dt}{\pi}} e^{-\frac{(\Delta x - Ct)^2}{4Dt}} \right\}. \quad (4.35)$$

L'integrale appena calcolato, può essere utilizzato insieme a quello calcolato per il nel capitolo precedente, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. Per quanto detto finora, quindi, la portata uscente dalla sezione terminale del tratto di lunghezza Δx , all'intervallo $k\Delta t = t + \Delta t$, viene calcolata come segue:

$$Q_{tot}(x + \Delta x, k) = Q(x + \Delta x, 0) + \sum_{i=1}^k Q(x, k - i + 1) \bar{U}_{\Delta x, k}(i) \\ + \sum_{i=1}^k q(\bullet, k - i + 1) \bar{UL}_{\Delta x, k}(i) \quad ; \quad (4.36)$$

Nella quale $q(\bullet, k - i + 1)$ è la portata uniformemente distribuita lungo il tratto di lunghezza Δx ; k è il k -esimo istante temporale; $\bar{U}_{\Delta x, k}(i)$ e $\bar{UL}_{\Delta x, k}(i)$ possiedono il pedice k poiché i valori di C e D vengono aggiornati al k -esimo passo temporale.

4.6 VALUTAZIONE DELL' INTEGRALE DI CONVOLUZIONE DELLA RISPOSTA ALL'IMPULSO RETTANGOLARE DEL CPM.

La risposta all'impulso unitario relativo all'equazione:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - C \frac{\partial Q}{\partial x};$$

è stata determinata integrando l'equazione nel dominio della *trasformata di Laplace*, per poi *anti-trasformare* la soluzione trovata ottenendo, nel dominio del tempo, la seguente funzione:

$$u_{\Delta x}(t) = \frac{\Delta x}{\sqrt{4Dt^2\pi}} e^{-\frac{(ct-\Delta x)^2}{4Dt}};$$

Valida per un tratto di lunghezza Δx , con le seguenti condizioni:

$$t \geq 0$$

$$C \geq 0.$$

$$D \geq 0$$

Il suo utilizzo richiede, in generale, una integrazione nel tempo per far fronte a funzioni in ingresso discrete. Dunque si deve calcolare il seguente integrale

$$U(i) = \int_t^{t+\Delta t} f(\xi) d\xi = F(t + \Delta t) - F(t),$$

dove i è l' i -esimo Δt , e dove

$$f(\xi) = \frac{\Delta x}{\sqrt{4D\pi\xi^3}} e^{-\frac{(\Delta x - C\xi)}{4D\xi}}.$$

Il problema può essere risolto se si conosce

$$F(t) = \int_0^t f(\xi) d\xi. \quad (4.37)$$

Per semplicità si effettuano le sostituzioni

$$a = \frac{\Delta x}{\sqrt{4D}} \text{ e } b = \frac{C}{\sqrt{4D}}$$

Con le quali l'integrale (4.37) diventa:

$$F(t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \xi^{-\frac{3}{2}} e^{-\left(a\xi^{\frac{1}{2}} - b\xi^{\frac{1}{2}}\right)^2} d\xi; \quad (4.38)$$

che può essere modificato ancora sostituendo $\eta = \xi^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \xi = \eta^2 \Rightarrow d\xi = -2\eta^{-3}d\eta$, e quindi, con i nuovi estremi di integrazione $\xi = 0 \Rightarrow \eta = \infty$ e $\xi = t \Rightarrow \eta = t^{-\frac{1}{2}}$, la (4.38) si riduce a:

$$F(t) = \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \int_{t^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-(a\eta - b\eta^{-1})^2} d\eta. \quad (4.39)$$

Con le sostituzioni

$$\zeta = a\eta - b\eta^{-1} \Rightarrow a\eta^2 - \zeta\eta - b = 0;$$

$$\eta = \frac{1}{2a} \left[\zeta + (\zeta^2 + 4ab)^{\frac{1}{2}} \right],$$

(nota: è stato mantenuto solo il segno + poiché η è positivo),

$$d\eta = \frac{1}{2a} \left[1 + \zeta(\zeta^2 + 4ab)^{-\frac{1}{2}} \right] d\zeta$$

$$\eta = t^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \zeta = at^{-\frac{1}{2}} - bt^{-\frac{1}{2}};$$

$$\eta = \infty \Rightarrow \zeta = \infty$$

Si ottiene:

$$F(t) = \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \int_{at^{-\frac{1}{2}} - bt^{\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-\zeta^2} \frac{1}{2a} \left[1 + \zeta(\zeta^2 + 4ab)^{-\frac{1}{2}} \right] d\zeta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{at^{-\frac{1}{2}} - bt^{\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{at^{-\frac{1}{2}} - bt^{\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-\zeta^2} \zeta(\zeta^2 + 4ab)^{-\frac{1}{2}} d\zeta \quad (4.40)$$

Utilizzando nella (4.40) il seguente cambiamento di variabile:

$$\mathcal{G} = (\zeta^2 + 4ab) \Rightarrow \zeta^2 = \mathcal{G}^2 - 4ab \Rightarrow \zeta = (\mathcal{G}^2 - 4ab)^{\frac{1}{2}}$$

$$d\zeta = \mathcal{G}(\mathcal{G}^2 - 4ab)^{-\frac{1}{2}} d\mathcal{G}$$

$$\zeta = at^{-\frac{1}{2}} - bt^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \mathcal{G} = at^{-\frac{1}{2}} + bt^{\frac{1}{2}}$$

$$\zeta = \infty \Rightarrow \mathcal{G} = \infty$$

(Nota: viene mantenuto il segno + in quanto gli estremi di integrazione sono positivi)

$$\begin{aligned} g &= (\zeta^2 + 4ab)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(at^{-\frac{1}{2}} - bt^{\frac{1}{2}} \right)^2 + 4ab \right]^{\frac{1}{2}} = [a^2 t^{-1} + b^2 t - 2ab + 4ab]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left[\left(at^{-\frac{1}{2}} + bt^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = at^{-\frac{1}{2}} + bt^{\frac{1}{2}} \end{aligned} ;$$

si perviene a:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{at^{-\frac{1}{2}} - bt^{\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{at^{-\frac{1}{2}} + bt^{\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-g^2} e^{4ab} (g^2 - 4ab)^{\frac{1}{2}} g^{-1} g (g^2 - 4ab)^{-\frac{1}{2}} dg = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{at^{-\frac{1}{2}} - bt^{\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta + \frac{e^{4ab}}{\sqrt{\pi}} \int_{at^{-\frac{1}{2}} + bt^{\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-g^2} dg \end{aligned} \quad (4.41)$$

Entrambi gli integrali all'ultimo membro della (4.41) sono del seguente tipo:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta ;$$

quindi con la sostituzione

$$\gamma = -\sqrt{2}\beta \Rightarrow \beta = -\frac{\gamma}{\sqrt{2}} \Rightarrow d\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}} d\gamma$$

$$\beta = \alpha \Rightarrow \gamma = -\sqrt{2}\alpha$$

$$\beta = \infty \Rightarrow \gamma = -\infty$$

si giunge alla:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{2}\alpha}^{-\infty} e^{-\frac{\gamma^2}{2}} d\gamma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2}\alpha} e^{-\frac{\gamma^2}{2}} d\gamma = N(-\sqrt{2}\alpha); \quad (4.42)$$

dove $N(\bullet)$ sta ad indicare la *Funzione Standard di Distribuzione di Probabilità*.

E dunque:

$$F(t) = N\left(-\frac{\Delta x - Ct}{\sqrt{2Dt}}\right) + e^{\frac{\Delta x C}{D}} N\left(-\frac{\Delta x + Ct}{\sqrt{2Dt}}\right); \quad (4.43)$$

che coincide con la (4.21) utilizzata nel paragrafo 4.4.

Poiché $N(\bullet)$ è dotata di un'espressione elementare, sono disponibili in letteratura tecnico-scientifica molte approssimazioni numeriche per implementarne il calcolo. In particolare si può utilizzare la seguente espressione (Abramowitz & Stegun 1970):

$$N(\delta) = 1 - f(\delta) \sum_{i=1}^5 a_i w^i; \forall \delta \geq 0$$

$$N(\delta) = f(\delta) \sum_{i=1}^5 a_i w^i; \forall \delta < 0$$

dove

$$f(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^2}{2}}$$

$$w = \frac{1}{1 + a_0 |\delta|}$$

ed

$$a_0 = 0.2316419$$

$$a_1 = 0.3193815$$

$$a_2 = -0.3565638$$

$$a_3 = 1.781478$$

$$a_4 = -1.821256$$

$$a_5 = 1.330274$$

Tale approssimazione polinomiale restituisce un errore massimo dell'ordine di $1.e^{-7}$.

Se la funzione in ingresso non è impulsiva, ma varia all'interno dell'intervallo temporale, come in figura, c'è bisogno di effettuare un'altra integrazione.

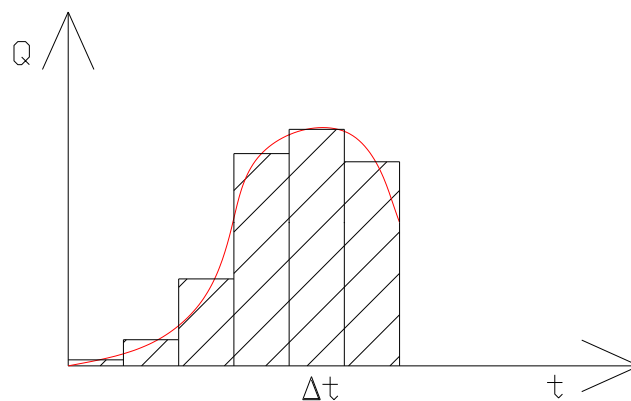


Fig.4.2 Funzione continua discretizzata

L'integrazione precedente è stata condotta utilizzando la risposta all'impulso unitario, valida per una funzione che passa da zero ad un certo valore istantaneamente, si pensi ad esempio alla funzione $H(t)$ di *Heavyside* (funzione gradino unitario), essa ha un

salto in corrispondenza dell'origine. Infatti, la risposta al gradino unitario, si determina effettuando l'integrale di convoluzione tra $H(t)$ e la risposta all'impulso unitario data dalla (4.19). Tenendo conto delle proprietà dell'*integrale di convoluzione* e del fatto che

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

si ha che:

$$U(t) = \int_0^t H(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau = 1 \cdot \int_0^t u(\tau)d\tau = F(t),$$

dove l'espressione di $F(t)$ coincide con la (4.43).

Quando la funzione varia all'interno dell'assegnato intervallo temporale, ma viene, per ipotesi, assunta costante all'interno di esso (come in Fig.4.2), viene utilizzata, in luogo della risposta all'impulso unitario (ovvero la risposta alla $\delta(t)$), la risposta all'*impulso unitario discreto* (detto anche “*impulso rettangolare*” o “*onda rettangolare*”), all'interno dell'*integrale di convoluzione*. Esso è un impulso di durata Δt ed intensità $1/\Delta t$ e può essere decomposto nella differenza di due funzioni di *Heavyside*, una con discontinuità nell'origine $H(t)$, e l'altra $H(t-\Delta t)$ traslata di una certa quantità Δt (Fig.4.3). In letteratura tecnica (ed in particolare nella *teoria dei segnali*), tale funzione viene indicata con il simbolo $rect(t)$ e presenta la seguente espressione:

$$rect(t) = \frac{1}{\Delta t} [H(t) - H(t - \Delta t)] = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} & 0 \leq t \leq \Delta t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

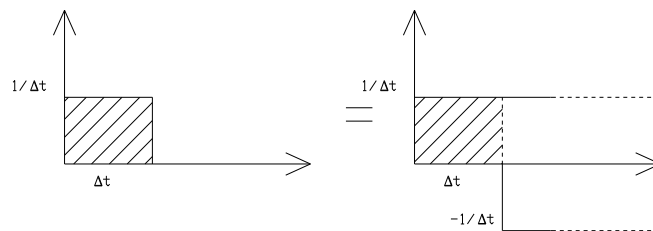


Fig. 4.3 Decomposizione dell'impulso unitario rettangolare

Dunque la risposta all'onda rettangolare, viene determinata tramite due integrali di convoluzione tra le funzioni di *Heavyside*, in cui essa si può essere decomposta, e la risposta all'impulso unitario:

$$\begin{aligned} \int_0^t \text{rect}(t-\tau)u(\tau)d\tau &= \frac{1}{\Delta t} \int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau + \int_0^t H(t-\tau-\Delta t)u(\tau)d\tau = \\ &= \frac{1}{\Delta t} F(t) - \frac{1}{\Delta t} F(t-\Delta t) = \frac{F(t) - F(t-\Delta t)}{\Delta t} = \bar{u}(t) \end{aligned} ;$$

e quindi se l'ingresso non è impulsivo ma può essere considerato costante nell'intervallo di tempo, la risposta sarà :

$$\bar{U}(t) = \int_t^{t+\Delta t} \bar{u}(\tau)d\tau = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} F(\tau)d\tau - \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} F(\tau-\Delta t)d\tau = \bar{F}(t) - \bar{F}(t-\Delta t).$$

Dunque in questo caso il problema può essere risolto se si conosce

$$\bar{F}(t) = \frac{\int_t^{t+\Delta t} \int_0^\xi \frac{\Delta x}{\sqrt{4\pi D \lambda^3}} e^{-\frac{(\Delta x - C t)^2}{4D\lambda}} d\lambda d\xi}{\Delta t} ;$$

usando la notazione:

$$F(\xi) = \int_0^\xi f(\lambda) = \int_0^\xi \frac{\Delta x}{\sqrt{4\pi D \lambda^3}} e^{-\frac{(\Delta x - C t)^2}{4D\lambda}} d\lambda ,$$

integrando per parti:

$$\begin{aligned} \bar{F}(t) &= \frac{1}{\Delta t} [\xi F(\xi)]_t^{t+\Delta t} - \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \xi f(\xi) = \frac{1}{\Delta t} [(t+\Delta t)F(t+\Delta t) - tF(t)] + \\ &- \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\Delta x}{\sqrt{4\pi D \xi}} e^{-\frac{(\Delta x - C t)^2}{4D\xi}} d\xi \end{aligned}$$

Il problema sarà dunque risolto dalla conoscenza di

$$F1(t) = \int_0^t \frac{\Delta x}{\sqrt{4\pi D \xi}} e^{-\frac{(\Delta x - C t)^2}{4D\xi}} d\xi ,$$

essendo

$$\bar{F}(t) = \frac{1}{\Delta t} IF(t) = \frac{1}{\Delta t} \{[(t+\Delta t)F(t+\Delta t) - tF(t)] - [F1(t+\Delta t) - F1(t)]\}. \quad (4.44)$$

Effettuando, nuovamente, le sostituzioni $a = \frac{\Delta x}{\sqrt{4D}}$ e $b = \frac{C}{\sqrt{4D}}$, si ottiene:

$$F1(t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \xi^{-\frac{1}{2}} e^{-\left(a\xi^{-\frac{1}{2}} - b\xi^{\frac{1}{2}}\right)^2} d\xi, \quad (4.45)$$

che mediante le sostituzioni

$$\begin{aligned} \eta = \xi^{\frac{1}{2}} &\Rightarrow \xi = \eta^2 \Rightarrow d\xi = 2\eta d\eta \\ \xi = 0 &\Rightarrow \eta = 0 \\ \xi = t &\Rightarrow \eta = t^{\frac{1}{2}} \end{aligned},$$

diventa

$$F1(t) = \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t^{\frac{1}{2}}} \eta^{-1} \eta e^{-(a\eta^{-1} - b\eta)^2} d\eta.$$

Con le sostituzioni

$$\begin{aligned} \zeta = a\eta^{-1} - b\eta &\Rightarrow b\eta^2 + \zeta\eta - a = 0 \Rightarrow \eta = -\frac{1}{2b} \left[\zeta - (\zeta^2 + 4ab)^{\frac{1}{2}} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow d\eta &= -\frac{1}{2b} \left[1 - \zeta(\zeta^2 + 4ab)^{-\frac{1}{2}} \right] d\zeta; \end{aligned},$$

$$\eta = t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \zeta = at^{-\frac{1}{2}} - bt^{\frac{1}{2}}; \quad \eta = 0 \Rightarrow \zeta = 0$$

mantenendo il segno + poiché $\eta \geq 0$, si ottiene:

$$\begin{aligned} F1(t) &= \frac{-2a}{2b\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{at^{-\frac{1}{2}} - bt^{\frac{1}{2}}} e^{-\zeta^2} \left[1 - \zeta(\zeta^2 + 4ab)^{-\frac{1}{2}} \right] d\zeta = \\ &= \frac{a}{b\sqrt{\pi}} \int_{at^{-\frac{1}{2}} - bt^{\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta - \frac{a}{b\sqrt{\pi}} \int_{at^{-\frac{1}{2}} - bt^{\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-\zeta^2} \zeta(\zeta^2 + 4ab)^{-\frac{1}{2}} d\zeta \end{aligned} \quad (4.46)$$

Effettuando il seguente cambiamento di variabile nel secondo integrale all'ultimo membro della (4.45):

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = (\zeta^2 + 4ab) &\Rightarrow \zeta^2 = \mathcal{G}^2 - 4ab \Rightarrow \zeta = (\mathcal{G}^2 - 4ab)^{\frac{1}{2}} \\ d\zeta &= \mathcal{G}(\mathcal{G}^2 - 4ab)^{-\frac{1}{2}} d\mathcal{G} \\ \zeta = at^{-\frac{1}{2}} - bt^{\frac{1}{2}} &\Rightarrow \mathcal{G} = at^{-\frac{1}{2}} + bt^{\frac{1}{2}} \\ \zeta = \infty &\Rightarrow \mathcal{G} = \infty \end{aligned},$$

alla fine si ottiene:

$$\begin{aligned}
 Fl(t) &= \frac{a}{b\sqrt{\pi}} \int_{at^{-\frac{1}{2}}-bt^{\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta - \frac{a}{b\sqrt{\pi}} \int_{at^{-\frac{1}{2}}+bt^{\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-g^2} e^{4ab} (g^2 - 4ab)^{\frac{1}{2}} g^{-1} g (g^2 - 4ab)^{-\frac{1}{2}} dg = \\
 &= \frac{a}{b} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{at^{-\frac{1}{2}}-bt^{\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta - \frac{e^{4ab}}{\sqrt{\pi}} \int_{at^{-\frac{1}{2}}+bt^{\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-g^2} dg \right\}
 \end{aligned}$$

Quindi, ricordando i valori di a e b , si ha

$$Fl(t) = \frac{\Delta x}{C} \left[N\left(-\frac{\Delta x - Ct}{\sqrt{2Dt}}\right) - e^{\frac{\Delta x C}{D}} N\left(-\frac{\Delta x + Ct}{\sqrt{2Dt}}\right) \right], \quad (4.47)$$

ed, infine, ricordando le espressioni sostituendo la (4.46) e la (4.43), nella (4.44), si ottiene la:

$$IF(t) = \left(t - \frac{\Delta x}{C}\right) N\left(-\frac{\Delta x - Ct}{\sqrt{2Dt}}\right) - \left(t + \frac{\Delta x}{C}\right) e^{\frac{\Delta x C}{D}} N\left(-\frac{\Delta x + Ct}{\sqrt{2Dt}}\right)$$

La funzione appena determinata consente in calcolo dell'equazione (4.25).

Quando $C \cong 0$ si può utilizzare, per evitare errori di overflow numerico,

$$\lim_{C \rightarrow 0} Fl(t) = \frac{\Delta x t}{\sqrt{\pi D t}} e^{\frac{\Delta x^2}{4Dt}} - \frac{\Delta x^2}{D} N\left(-\frac{\Delta x}{\sqrt{2Dt}}\right),$$

in luogo della espressione di $Fl(t)$ ricavata in precedenza.

4.7 VALUTAZIONE DELL' INTEGRALE DI CONVOLUZIONE DELLA RISPOSTA ALL'IMPULSO RETTANGOLARE PER GLI AFFLUSSI LATERALI.

La funzione di trasferimento, ovvero la risposta all'impulso unitario, del Modello Parabolico Linearizzato con influssi laterali, come mostrato in 4.5, ha la seguente espressione:

$$ul_{\Delta x}(t) = C \cdot \left\{ 1 - N\left(-\frac{\Delta x - Ct}{\sqrt{2Dt}}\right) + \exp\left(\frac{\Delta x C}{D}\right) \cdot N\left(-\frac{\Delta x + Ct}{\sqrt{2Dt}}\right) \right\} = C \cdot [1 - F(t)]; \quad (4.48)$$

dove $F(t)$ ha la stessa espressione ricavata in precedenza.

La (4.48) rappresenta la portata uscente dalla sezione terminale di un tratto di lunghezza Δx , al tempo t , a causa di una portata uniformemente distribuita, ai lati del tratto, di tipo impulsivo.

Poiché gli idrogrammi relativi agli afflussi laterali uniformemente distribuite, in generale, sono noti per determinati istanti temporali, nella pratica, vengono approssimati ad una serie di rettangoli, assimilabili ad un treno di onde rettangolari. Essendo la risposta all'onda rettangolare riconducibile alla risposta di due funzioni a gradino unitario mediante la seguente relazione:

$$\begin{aligned} \int_0^t \text{rect}(t-\tau)ul_{\Delta x}(\tau)d\tau &= \frac{1}{\Delta t} \int_0^t H(t-\tau)ul_{\Delta x}(\tau)d\tau + \int_0^t H(t-\tau-\Delta t)ul_{\Delta x}(\tau)d\tau = \\ &= \frac{1}{\Delta t} G(t) - \frac{1}{\Delta t} G(t-\Delta t) = \frac{G(t)-G(t-\Delta t)}{\Delta t} = UL_{\Delta x}(t) \end{aligned} \quad (4.49)$$

dove

$$G(t) = \int_0^t ul_{\Delta x}(\gamma)d\gamma \quad (4.50)$$

rappresenta la risposta al gradino unitario $H(t)$ (distribuzione di *Heavyside*).

Se si conosce analiticamente l'integrale di convoluzione, fra l'istante t e $t+\Delta t$, tra $UL_{\Delta x}(t)$ e un disturbo rettangolare unitario, nei calcoli pratici è possibile sostituire gli integrali con una sommatoria e determinare la portata uscente nella sezione finale del generico tratto di lunghezza Δx , all'istante temporale k , nel seguente modo:

$$Q(x+\Delta x, k) = \sum_{i=1}^k q(\bullet, k-i+1) \bar{UL}_{\Delta x, k}(i), \quad (4.51)$$

Dove $q(\bullet, k-i+1)$ è il disturbo a forma di onda rettangolare, che rappresenta la portata uniformemente distribuita ai lati del tratto in funzione dell' i -esimo istante temporale (con $i = (1, 2, \dots, k)$), mentre

$$\bar{UL}_{\Delta x, k}(i) = \int_t^{t+\Delta t} UL_{\Delta x}(\gamma)d\gamma = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} [G(\gamma) - G(\gamma - \Delta t)]d\gamma. \quad (4.52)$$

Considerato che ogni singolo integrale della (4.52) all'ultimo membro può essere decomposto come segue:

$$\int_t^{t+\Delta t} G(\theta)d\theta = \int_0^{t+\Delta t} G(\theta)d\theta - \int_0^t G(\theta)d\theta, \quad (4.53)$$

è sufficiente calcolare l'espressione di uno dei due integrali al secondo membro della (4.54) per risolvere il problema, ad esempio:

$$\int_0^t G(\theta)d\theta. \quad (4.55)$$

e quindi, è necessario conoscere:

$$IG(t) = \int_0^t G(\theta) d\theta = \int_0^t \int_0^\theta u_{\Delta x}(\gamma) d\gamma d\theta. \quad (4.56)$$

Sfruttando i del capitolo precedente, si ha che:

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_0^t u_{\Delta x}(\gamma) d\gamma = \int_0^t C[1 - F(\gamma)] d\gamma = C \int_0^t d\gamma - C \int_0^t F(\gamma) d\gamma = C\{t - tF(t) + Fl(t)\} = \\ &= C \left\{ t - t \left[N\left(-\frac{\Delta x - Ct}{\sqrt{2Dt}}\right) + e^{\frac{\Delta x C}{D}} N\left(-\frac{\Delta x + Ct}{\sqrt{2Dt}}\right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta x}{C} \left[N\left(-\frac{\Delta x - Ct}{\sqrt{2Dt}}\right) - e^{\frac{\Delta x C}{D}} N\left(-\frac{\Delta x + Ct}{\sqrt{2Dt}}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Posto $IF(t) = tF(t) - Fl(t) \Rightarrow G(t) = C\{t - IF(t)\}$, eseguendo l'integrazione per parti nella (4.57) si perviene alla

$$\int_0^t G(\theta) d\theta = C \frac{t^2}{2} - C \int_0^t IF(\theta) d\theta = C \frac{t^2}{2} - CtIF(t) + C \int_0^t \theta \frac{d}{d\theta} [IF(\theta)] d\theta. \quad (4.58)$$

Da quanto osservato nel precedente paragrafo, risulta che

$$IF(t) = tF(t) - Fl(t) = \int_0^t F(\theta) d\theta \Rightarrow \frac{dIF(t)}{dt} = F(t), \quad (4.59)$$

E quindi la (4.58) diventa:

$$\int_0^t G(\theta) d\theta = C \frac{t^2}{2} - CtIF(t) + C \int_0^t \theta F(\theta) d\theta, \quad (4.60)$$

quindi bisogna conoscere:

$$\int_0^t \theta F(\theta) d\theta. \quad (4.61)$$

Integrando per parti la (4.61) e ricordando che vale la seguente relazione:

$$F(t) = \int_0^\theta u_{\Delta x}(\theta) d\theta \Rightarrow \frac{dF(t)}{dt} = u_{\Delta x}(t) = \frac{\Delta x}{\sqrt{4D\pi^3}} e^{-\frac{(\Delta x - Ct)^2}{2Dt}}, \quad (4.62)$$

la (4.61) diventa:

$$\begin{aligned} \int_0^t \theta F(\theta) d\theta &= \frac{t^2}{2} F(t) - \frac{1}{2} \int_0^\theta \theta^2 u_{\Delta x}(\theta) d\theta = \frac{t^2}{2} F(t) - \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{\theta^2 \Delta x}{\sqrt{4D\pi^3}} e^{-\frac{(\Delta x - C\theta)^2}{2D\theta}} d\theta = \\ &= \frac{t^2}{2} F(t) - \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{\theta^{1/2} \Delta x}{\sqrt{4D\pi}} e^{-\frac{(\Delta x - C\theta)^2}{2D\theta}} d\theta \end{aligned} \quad (4.63)$$

e quindi il problema si è ridotto alla conoscenza di:

$$\int_0^{\theta} \frac{\theta^{1/2} \Delta x}{\sqrt{4D\pi}} e^{-\frac{(\Delta x - C\theta)}{2D\theta}} d\theta. \quad (4.64)$$

Per semplicità di trattazione, si pone ancora:

$$a = \frac{\Delta x}{\sqrt{4D}}; \quad b = \frac{C}{\sqrt{4D}}. \quad (4.65)$$

Effettuando la seguente sostituzione di variabile:

$$\theta = \xi^{-1} \Rightarrow d\theta = -\xi^{-2} d\xi; \quad \theta = 0 \Rightarrow \xi = \infty; \quad \theta = t \Rightarrow \xi = t^{-1};$$

e sostituendo le espressioni (4.65) nell'integrale (4.64), si ottiene:

$$\begin{aligned} & -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{t^{-1}} \xi^{-1/2} \xi^{-2} e^{-\left(a\xi^{1/2} - b\xi^{-1/2}\right)^2} d\xi = -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{t^{-1}} \xi^{-1/2} e^{-a^2\xi} e^{2ab} \left(\xi^{-2} e^{-b^2\xi^{-1}}\right) d\xi = \\ & = -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{t^{-1}} \xi^{-1/2} e^{-a^2\xi} e^{2ab} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{e^{-b^2\xi^{-1}}}{b^2} \right) d\xi \end{aligned} \quad (4.66)$$

Effettuando l'integrazione per parti, l'ultimo integrale della (4.66) diventa:

$$-\frac{a}{\sqrt{\pi}b^2} \xi^{-1/2} e^{-\left(a\xi^{1/2} - b\xi^{-1/2}\right)^2} \Big|_{\infty}^{t^{-1}} + \frac{a}{\sqrt{\pi}b^2} \int_{\infty}^{t^{-1}} \xi^{-1/2} e^{-\left(a\xi^{1/2} - b\xi^{-1/2}\right)^2} \left(-\frac{1}{2} \xi^{-3/2} - a^2 \xi^{-1/2} \right) d\xi. \quad (4.67)$$

Il primo termine della (4.67), ricordando i valori di a e b , presenta l'espressione seguente:

$$-\frac{a}{\sqrt{\pi}b^2} \xi^{-1/2} e^{-\left(a\xi^{1/2} - b\xi^{-1/2}\right)^2} \Big|_{\infty}^{t^{-1}} = \frac{2\Delta x}{C^2} \sqrt{\frac{Dt}{\pi}} e^{-\frac{(\Delta x - Ct)^2}{4Dt}}. \quad (4.68)$$

Il secondo termine della (4.67), può essere decomposto nella somma di due integrali:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{\sqrt{\pi}b^2} \int_{\infty}^{t^{-1}} \xi^{-1/2} e^{-\left(a\xi^{1/2} - b\xi^{-1/2}\right)^2} \left(-\frac{1}{2} \xi^{-3/2} - a^2 \xi^{-1/2} \right) d\xi = \\ & -\frac{a}{2\sqrt{\pi}b^2} \int_{\infty}^{t^{-1}} \xi^{-3/2} e^{-\left(a\xi^{1/2} - b\xi^{-1/2}\right)^2} d\xi - \frac{a^2 a}{\sqrt{\pi}b^2} \int_{\infty}^{t^{-1}} \xi^{-1/2} e^{-\left(a\xi^{1/2} - b\xi^{-1/2}\right)^2} d\xi \end{aligned} \quad (4.69)$$

Eseguendo il seguente cambiamento di variabile

$$\xi = \tau^{-1} \Rightarrow d\xi = -\tau^{-2} d\tau \quad \xi = \infty \Rightarrow \tau = 0 \quad \xi = t^{-1} \Rightarrow \tau = t,$$

il secondo membro della (4.69) diventa:

$$\frac{a}{2\sqrt{\pi}b^2} \int_0^t \tau^{-1/2} e^{-\left(a\tau^{-1/2} - b\tau^{1/2}\right)^2} d\tau + \frac{a^2}{b^2} \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \tau^{-3/2} e^{-\left(a\tau^{-1/2} - b\tau^{1/2}\right)^2} d\tau. \quad (4.70)$$

Il primo termine della (4.70) è un integrale dello stesso tipo della (4.45), quindi, sfruttando i risultati già ottenuti nel precedente paragrafo e sostituendo l'espressione di b , esso vale:

$$\frac{a}{2\sqrt{\pi}b^2} \int_0^t \tau^{-1/2} e^{-\left(a\tau^{-1/2}-b\tau^{1/2}\right)^2} d\tau = \frac{1}{2b^2} Fl(t) = \frac{2D}{C^2} Fl(t). \quad (4.71)$$

Il secondo integrale della (4.70) è, invece, dello stesso tipo della (4.38). Sfruttando il risultato già ottenuto nel precedente paragrafo, per il calcolo della (4.38), e sostituendo le espressioni (4.65), il secondo integrale della (4.70) diventa:

$$\frac{a^2}{b^2} \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \tau^{-3/2} e^{-\left(a\tau^{-1/2}-b\tau^{1/2}\right)^2} d\tau = \frac{\Delta x^2}{C^2} F(t). \quad (4.72)$$

Sostituendo nella (4.60) i risultati ottenuti, si perviene all'espressione cercata:

$$\begin{aligned} IG(t) = \int_0^t G(\theta) d\theta = \frac{C}{2} \left\{ t^2 - \left(t^2 + \frac{\Delta x}{C^2} \right) \left[N\left(-\frac{\Delta x - Ct}{\sqrt{2Dt}} \right) + e^{\frac{\Delta x C}{D}} N\left(-\frac{\Delta x + Ct}{\sqrt{2Dt}} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{2\Delta x}{C} \left(t^2 - \frac{D}{C^2} \right) \left[N\left(-\frac{\Delta x - Ct}{\sqrt{2Dt}} \right) - e^{\frac{\Delta x C}{D}} N\left(-\frac{\Delta x + Ct}{\sqrt{2Dt}} \right) \right] + \frac{2\Delta x}{C} \sqrt{\frac{Dt}{\pi}} e^{-\frac{(\Delta x - Ct)^2}{4Dt}} \right\}. \quad (4.73) \end{aligned}$$

4.8 IL METODO MIXED FLOW PER IL CPM

Lo schema CPM richiede il calcolo di profili di moto permanente, al fine di determinare i tiranti idrici nelle varie sezioni della rete, ad ogni passo temporale. Lo schema originariamente proposto da *Todini & Bossi* prevede il calcolo di profili di moto permanente solo nell'ipotesi di correnti lente, mentre nelle reti di drenaggio si può avere a che fare anche con correnti veloci (per esempio nelle reti di fognatura delle cittadine o dei paesi di montagna), oppure con correnti di tipo misto veloci/lente (ad esempio nei tratti immediatamente a valle di una paratoia o nel passaggio dell'acqua attraverso le pile di un ponte). E' necessario quindi utilizzare un metodo per il calcolo dei profili di moto permanente, in grado di trattare i fenomeni appena menzionati.

Nel presente lavoro lo schema PAB originale è stato modificato impiegando un metodo generale per il calcolo dei profili di moto permanente che prevede l'utilizzo sia dell'equazione dell'energia, sia dell'equazione della quantità di moto (*Molinas & Yang* 1985, *Hec-Ras* 4.1).

Il calcolo dei profili di corrente viene condotto facendo uso dello *Standard-Step Method* (Chow 1959, Henderson 1959), per risolvere, tra due generiche sezioni di calcolo con il metodo della Bisezione (si veda Teukolsky 1997), l'equazione dell'energia:

$$z_m + h_m + \frac{Q_m^2}{2gA_m^2} = z_v + h_v + \frac{Q_v^2}{2gA_v^2} - \Delta x J_{med}; \quad (4.74)$$

Nella quale:

i pedici m e v si riferiscono alle quantità valutate rispettivamente nella sezione a monte e a valle; z è la quota del punto più depresso della generica sezione; h rappresenta il tirante idrico; Q indica la portata; A è la sezione idrica; g è l'accelerazione di gravità; Δx è la distanza tra le due generiche sezioni di monte e di valle; J_{med} è la media aritmetica della cadente dell'energia:

$$J_{med} = \frac{1}{2} \left[\frac{Q_v^2}{k^2 A_v^2 R_v^{4/3}} + \frac{Q_m^2}{k^2 A_m^2 R_m^{4/3}} \right].$$

Il calcolo viene eseguito da valle verso monte per le correnti lente, e da monte verso valle per le correnti veloci.

Quando il tipo di corrente cambia da veloce a lenta, occorre considerare la presenza di un risalto idraulico. In questo caso si fa uso dell'equazione di conservazione della quantità di moto proiettata lungo la direzione del moto:

$$\frac{Q\gamma}{g} (\beta_v V_v - \beta_m V_m) = P_m - P_v + W \sin \theta - F_f \quad (4.75)$$

Nella quale γ è il peso specifico dell'acqua; β è il coefficiente di ragguaglio della velocità media; P è la forza di pressione agente sulla generica sezione trasversale; W è il peso del volume d'acqua incluso tra le due sezioni di monte e di valle; F_f è la risultante degli sforzi di resistenza al moto agenti lungo il contorno del volume di controllo; θ è l'angolo di inclinazione della linea di fondo del canale rispetto all'orizzontale. Assumendo che i $\beta = 1$, che siano trascurabili F_f e $W \sin \theta$, dividendo tutto per γ , la (4.75) si riduce a:

$$\frac{Q}{g} V_m + A_m \bar{y}_m = \frac{Q}{g} V_v + A_v \bar{y}_v \quad (4.76)$$

Dove \bar{y} è l'affondamento del baricentro della sezione idrica A rispetto alla superficie libera.

La quantità:

$$SF = \frac{Q}{g}V + A\bar{y} \quad (4.77)$$

è definita *Forza Specifica*, ed è noto, dall'idraulica classica, che le altezze coniugate di un risalto idraulico sono le altezze, prima e dopo il risalto, che possiedono la stessa *Forza Specifica*. Dunque il metodo di calcolo è costituito dai seguenti passi:

1. Si assegnano condizioni al contorno sia alla sezione di chiusura della rete sia alle sezioni iniziali di tutti i rami sorgente;
2. Il calcolo inizia nell'ipotesi di corrente subcritica, risolvendo da valle verso monte, l'equazione dell'energia, calcolando in ogni sezione la *Forza Specifica*. Laddove non sussistono le condizioni di corrente lenta, non si ha la convergenza del metodo della *Bisezione*. In tal caso si assegna il tirante di stato critico e si continua il calcolo suddetto da valle a monte, assegnando tirante critico ogni qualvolta il metodo della bisezione non converge;
3. Dopodiché si procede al calcolo di un profilo di corrente supercritica da monte verso valle, valutando, a partire dalle sezioni dove sono assegnate le condizioni al contorno, la *Forza Specifica*. A questo punto possono verificarsi i seguenti casi:
 - a. *La Forza Specifica della corrente, valutata come corrente supercritica, è maggiore della Forza Specifica della corrente subcritica, valutata al passo precedente*: si assegna in tale sezione il nuovo tirante calcolato e si continua il calcolo in ipotesi di corrente supercritica verso valle, aggiornando, sezione per sezione, i tiranti idrici e confrontando la *Forza Specifica*, valutata in ipotesi di corrente supercritica, con quella valutata come corrente subcritica al passo 2 fino a quando la *Forza Specifica*, in una sezione, è inferiore a quella valutata al passo precedente. In tal caso vi è un risalto idraulico tra la sezione in questione e quella immediatamente a monte. Il calcolo di corrente supercritica si interrompe e si passa alla prima sezione a valle dove è stato segnalato stato critico nel passo 2. A partire da tale sezione si calcola, utilizzando il tirante di stato critico come condizione al contorno per risolvere l'equazione dell'energia, il tirante nella sezione immediatamente a valle e quindi la *Forza Specifica*. Se essa è maggiore di quella valutata al

passo 2 nella stessa sezione si ripete da capo la procedura del sottopasso presente. In caso contrario si va al sottopasso b.

- b. *La Forza Specifica di corrente veloce e minore di quella valutata come corrente lenta:* si passa direttamente alla prima sezione a valle ove, nel passo 2 si è assegnato il tirante di stato critico. Utilizzando il tirante di stato critico, assegnato a tale sezione, come condizione al contorno, si calcola nella sezione immediatamente a valle, risolvendo l'equazione dell'energia, il tirante e la *Forza Specifica*. Se essa è maggiore di quella valutata al passo 2 nella stessa sezione si ripete dal passo a, altrimenti si riparte dal presente sottopasso.
- c. *La forza specifica di corrente veloce è minore di quella valutata come corrente lenta e non è stato assegnato tirante di stato critico in nessuna sezione al passo 2:* La corrente è subcritica ovunque e quindi non è necessario eseguire calcoli in ipotesi di corrente supercritica.

Per ciò che riguarda il calcolo nei nodi della rete, ovvero nei punti in cui uno o più canali confluiscono, il calcolo si esegue in maniera leggermente differente, a seconda del tipo di corrente che si sta ipotizzando.

La relazione di base, per la determinazione del tirante idrico nelle confluenze, discende sempre dall'equazione di conservazione dell'energia nell'ipotesi che siano trascurabili le perdite di carico distribuite. Considerato uno schema del tipo rappresentato in Fig.4.4 nell'ipotesi che le quote delle sezioni terminali dei singoli canali, che confluiscono nello stesso nodo, siano le stesse, nella fase di tracciamento dei profili di corrente subcritica, una volta effettuato il calcolo del profilo del canale posto a valle della confluenza, per determinare il tirante nei due canali a monte si fa uso delle seguenti relazioni:

$$h_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \eta \frac{(V_2 - V_1)^2}{2g} = h_1 + \frac{V_1^2}{2g}; \quad (4.78)$$

$$h_3 + \frac{V_3^2}{2g} + \eta \frac{(V_3 - V_1)^2}{2g} = h_1 + \frac{V_1^2}{2g}. \quad (4.79)$$

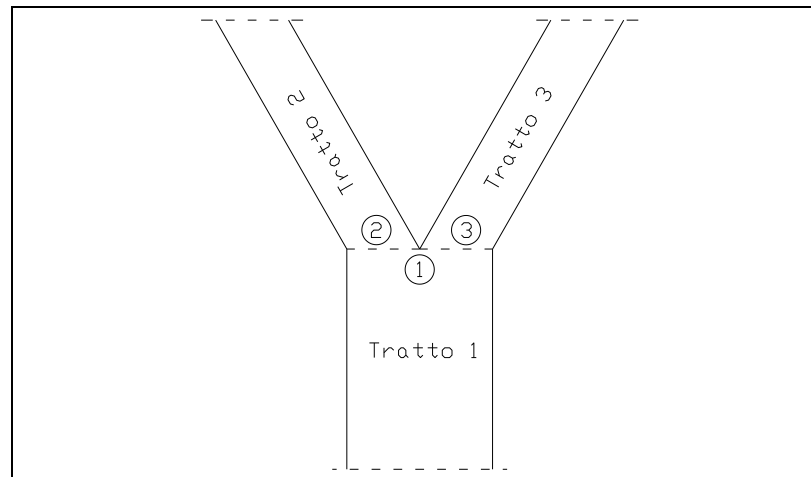


Fig.4.4 Schematizzazione nodo di confluenza.

In fase di tracciamento del profilo di corrente supercritica, si procede in maniera leggermente differente. Una volta determinato il profilo di corrente nei due canali a monte della confluenza, si valuta la *Forza Specifica* nelle sezioni 2 e 3. Se la forza specifica della sezione 2 è maggiore di quella nella sezione 3, allora il tirante nella sezione 1 viene calcolato con la (4.78). In caso contrario si farà uso della (4.79).

Inserendo all'interno dello schema CPM, il metodo di calcolo appena descritto, è possibile effettuare calcoli di moto vario di reti di drenaggio, qualunque sia la geometria assegnata alla rete. Inoltre, l'impiego della *Peissmann Slot*, consente di effettuare calcoli anche nei casi in cui si abbia il passaggio da moto a superficie libera a moto in pressione, senza dover cambiare il modello di moto vario.

5 ALGORITMI GENETICI.

Data una funzione $f(\bar{x})$, in genere denominata *funzione di costo* o *funzione obiettivo*, di una o più variabili \bar{x} , dette *variabili decisionali*, soggette a generiche condizioni del tipo:

$$\begin{cases} f(\bar{x}) \leq \bar{y} \\ f(\bar{x}) \geq \bar{z} \end{cases},$$

dette condizioni di vincolo, un problema di *ottimizzazione vincolata* consiste nella ricerca di quei valori $\bar{x} = \bar{x}_o$, per i quali la funzione $f(\bar{x})$ assume il massimo o il minimo valore sul dominio D , detto *spazio delle soluzioni*, la cui frontiera ∂D è costituita dall'unione delle curve rappresentate dalle condizioni di vincolo. In generale non esiste un metodo “standard” per la soluzione del problema suddetto, ma esistono una serie di algoritmi, ognuno dei quali, risulta essere idoneo ad un determinato tipo di problema. I metodi di ottimizzazione tradizionali richiedono, generalmente, che la $f(\bar{x})$ sia regolare e convessa, inoltre, lo spazio delle soluzioni, a sua volta, deve essere un dominio convesso. Tali metodi possono essere classificati come metodi basati sul *gradiente* o sull'*Hessiano*, come ad esempio il *Metodo della Discesa Diretta* (*steepest descent*), il *Metodo del Gradiente Coniugato*, il *Metodo delle Secanti*, il *Metodo di Newton* ecc.

Nei problemi di ottimizzazione delle reti di drenaggio tali metodi non possono essere utilizzati, poiché lo spazio delle soluzioni non solo non è noto a priori, ma non risulta essere nemmeno un dominio convesso. Infatti, in tali problemi, le condizioni di vincolo sono imposte sulle velocità massime e/o minime, e sui tiranti (in genere massimi), che sono delle funzioni delle variabili decisionali, le cui espressioni non sono note in maniera esplicita, ma tramite relazioni espresse da equazioni differenziali alle derivate parziali. Inoltre l'andamento delle velocità e dei tiranti, essendo legato sia alle pendenze che alla dimensione geometrica delle sezioni, presenta molti punti di massimo e minimo locale, il che rende lo spazio delle soluzioni un dominio non convesso.

Negli ultimi anni l'uso di *Algoritmi Euristici* si è molto diffuso in campo tecnico-scientifico ed, in particolare, gli algoritmi *Bio-Inspirati*, come gli *Algoritmi Genetici*

(GA), l'*Ant Colony Optimization* (ACO), la *Simulated Annealing* (SA) e la *Particle Swarm Optimization* (PSO), hanno trovato largo impiego nei campi dell'ingegneria.

Nel presente lavoro si è affrontato il problema della progettazione ottimizzata delle reti di drenaggio mediante un approccio di tipo euristico, ed in particolare, si è fatto largo impiego degli algoritmi genetici. Questi ultimi non richiedono informazioni né sul gradiente della funzione di costo (quindi non è richiesto che tale funzione sia regolare e convessa), né sulle caratteristiche dello spazio delle soluzioni, quindi si rivelano essere uno strumento idoneo ad affrontare tale problema.

5.1 GLI ALGORITMI GENETICI

Se si pensa agli organismi che popolano attualmente il pianeta, come il risultato di tante iterazioni di un grande algoritmo di ottimizzazione nel quale la funzione di costo, che si vuole massimizzare, è una misura del livello di sopravvivenza delle specie stesse, le caratteristiche degli organismi del mondo naturale dovranno risultare adatte alla topologia del paesaggio (*Grant*, 1985). L'ambiente e come le diverse specie interagiscono, rappresentano i vincoli del problema. In sostanza il processo di evoluzione, è un grande algoritmo di ottimizzazione naturale, che determina quali sono le specie viventi con le caratteristiche più adatte alla sopravvivenza. L'algoritmo genetico (GA) è una tecnica di ottimizzazione e ricerca che trae ispirazione dai principi della genetica e della selezione naturale teorizzata per la prima volta da *Charles Darwin*. Tale metodo fu sviluppato da *John Holland* (1975) nel corso degli anni sessanta e settanta, e reso definitivamente celebre da uno dei suoi studenti, *David Goldberg* (1989), il quale fu capace di risolvere un difficile problema riguardante il controllo delle linee di trasmissione di gas all'interno della sua tesi di dottorato. *Holland* (1975) gettò per primo le basi teoriche del GA attraverso il suo "*Schema Theorem*". *De Jong* (1975), nel suo lavoro, dimostrò l'utilità dei GA per l'ottimizzazione delle funzioni, ed effettuò il primo tentativo di ricerca dei parametri ottimali del GA. *Goldberg* probabilmente ha dato il maggior contributo al GA mediante le sue applicazioni ed il suo celebre libro (1989). Da allora, in letteratura, sono nate molte varianti del GA, caratterizzate da diversi livelli di efficienza. L'idea che sta alla base dei GA è quindi quella di prendere, all'interno di un insieme di soluzioni di partenza (*Popolazione*), le soluzioni (*Individui*) migliori, mediante

opportune regole di selezione (*Selection Procedure*), basate sulla capacità di sopravvivenza o di adattamento (*Fitness*), e di ricombinarle in qualche modo fra loro (*Crossover*) in maniera tale che esse evolvano, iterazione per iterazione, verso un punto di ottimo. Come avviene per le specie naturali, ad alcuni individui è concesso di mutare qualche gene (*Mutation Procedure*), il che permette di poter esplorare punti dello spazio delle soluzioni, non ancora esaminati, in modo tale da non incappare in un punto di ottimo locale.

5.2 ELEMENTI CHIAVE

Per poter descrivere al meglio il funzionamento del GA, è necessario prima definirne le terminologie ed i relativi significati.

<i>Individuo</i>	Soluzione di un problema;
<i>Popolazione</i>	Insieme di soluzioni;
<i>Generazione</i>	Popolazione ad una certa iterazione del GA;
<i>Fitness</i>	Qualità di una soluzione;
<i>Cromosoma</i>	Rappresentazione codificata di una soluzione;
<i>Gene</i>	Componente di una rappresentazione;
<i>Fenotipo</i>	Insieme dei valori reali delle variabili di controllo;
<i>Selezione</i>	Operatore per la scelta degli individui migliori;
<i>Crossover</i>	Operatori per la combinazione delle soluzioni;
<i>Mutazione</i>	Operatore per l'esplorazione dello spazio delle soluzioni.

5.3 L'INDIVIDUO

Un individuo, come già accennato, rappresenta una singola soluzione. Esso racchiude in se due manifestazioni della soluzione, ovvero:

- Il *Cromosoma*, cioè la riga genetica di informazioni, detta genotipo, con la quale il GA opera.
- Il *Fenotipo*, cioè l'espressione della soluzione in termini di modello (si pensi alla geometria reale della rete).

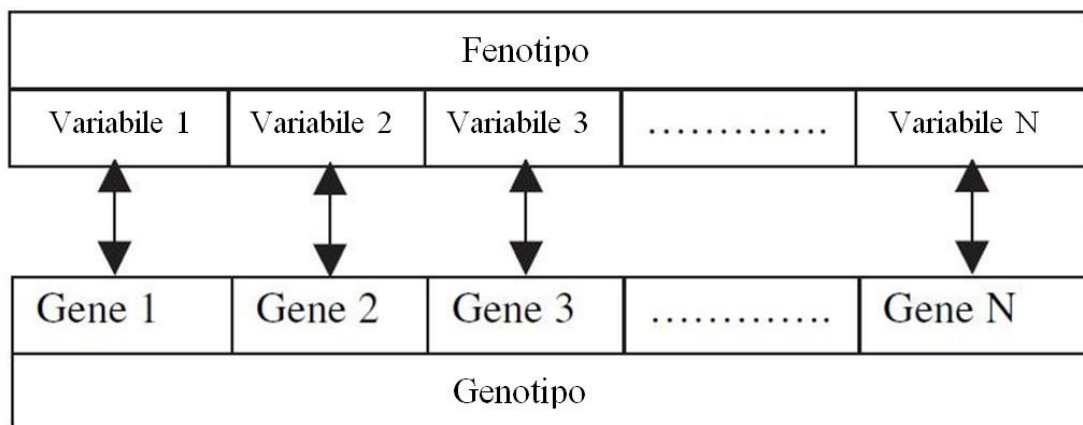


Fig.5.1 rappresentazione di genotipo e fenotipo.

Un cromosoma è costituito da una sequenza di geni e questi ultimi sono la rappresentazione nel GA delle variabili decisionali, o per meglio dire, una codifica delle variabili decisionali. Dunque ogni valore assunto dalle variabili decisionali, per la singola soluzione, corrisponde ad un gene in un cromosoma.

Nel presente lavoro di tesi, si è fatto uso di una codifica *Binaria*, come originariamente previsto dalla teoria di *Holland*, e di conseguenza i cromosomi sono delle stringhe di *Bit*, come mostrato nella figura sottostante.

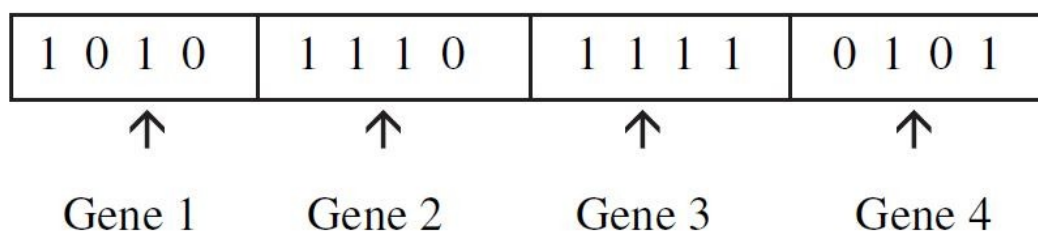


Fig.5.2 Rappresentazione del cromosoma come sequenza di geni.

5.4 IL GENE

I geni sono le unità di base dell'algoritmo genetico, in quanto un cromosoma, che è una codifica in stringa di bit di una possibile soluzione, è costituito da una sequenza di geni e quindi essi sono a loro volta delle sotto-stringhe di bit di una certa lunghezza. Una stringa di bit è una rappresentazione binaria di un numero appartenente ad un intervallo dotato di limite superiore ed inferiore, quindi essendo il gene la rappresentazione di un singolo valore di una delle variabili decisionali, tali variabili decisionali dovranno appartenere ad intervalli, dotati di limite superiore e inferiore. Una stringa di bit di lunghezza n può rappresentare massimo $(2^n - 1)$ valori.

5.5 LA CODIFICA

Poiché fa uso di due soli simboli per rappresentare l'informazione, il codice binario si dice essere in base 2. A ogni posizione nel numero binario corrisponde una potenza di 2 (la successione crescente di potenze va da destra a sinistra). Sommando i valori che si ottengono moltiplicando il valore della cifra binaria per il valore della potenza di 2, si ottiene il corrispondente valore decimale. Per esempio, ad ogni posizione del numero binario 100101, corrispondono le seguenti potenze di 2 ($2^6, 2^5, 2^4, 2^3, 2^2, 2^0$), ovvero (64;32;16;8;4;2;1). Il numero decimale corrispondente si ottiene moltiplicando i bit per le potenze di 2 della stessa posizione, quindi:

$$1 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 75.$$

Per convertire un numero dal sistema decimale al sistema binario, si opera l'algoritmo della divisione, che consiste nei seguenti passi:

- a) Si divide il numero da convertire per 2;
- b) Se il dividendo è pari da resto 0, se è dispari da resto 1. Il resto viene memorizzato;
- c) Si prende il risultato della divisione senza resto e si ripete dal punto b) fino a che il risultato della divisione è 0.
- d) Si scrive la sequenza dei resti a partire dall'ultima divisione effettuata.

Per esempio per il numero 27, si ha che:

$$\begin{array}{ll}
27 \div 2 = 13 & \text{resto } 1 \\
13 \div 2 = 6 & \text{resto } 1 \\
6 \div 2 = 3 & \text{resto } 0 \\
3 \div 2 = 1 & \text{resto } 1 \\
1 \div 2 = 0 & \text{resto } 1
\end{array}$$

Dunque il corrispondente di 27 nel sistema binario è 11011 (procedendo dall'ultimo resto ottenuto).

5.6 LA POPOLAZIONE

La popolazione consiste in un insieme di individui, i parametri del fenotipo che definiscono gli individui ed alcune informazioni sullo spazio di ricerca. I due aspetti importanti sulla popolazione, utilizzati nel GA, sono:

1. La popolazione della generazione iniziale;
2. La dimensione della popolazione.

In genere la popolazione corrispondente alla generazione iniziale (prima iterazione dell'algoritmo), viene generata in maniera casuale, ovvero, i valori delle variabili decisionali, vengono ad essere scelti in maniera casuale per ogni individuo. Ciò non vuol dire che, al fine di generare la popolazione iniziale, non possano essere utilizzate delle buone soluzioni già note a priori, oppure che non possano essere applicati dei criteri in grado di garantire una popolazione iniziale, costituita da individui, quindi da soluzioni, che rispettino, quando possibile, almeno una parte dei vincoli del problema. Infatti, nel presente lavoro, si è scelto di generare la popolazione iniziale in maniera tale che gli individui rispettino i vincoli relativi alle dimensioni delle sezioni e relativi alle incongruenze topografiche (si veda 4.5 e 4.6). In tal modo si ha una probabilità maggiore, rispetto ad una generazione completamente casuale della popolazione iniziale, di generare soluzioni che rispettino i vincoli imposti nella prima iterazione.

Per quel che riguarda la dimensione della popolazione, va detto che essa deve essere tale da poter garantire una buona esplorazione dello spazio delle soluzioni. *Goldberg* (1989), infatti, ha dimostrato che l'efficienza del GA nella ricerca dell'ottimo globale, è fortemente influenzata dalla dimensione della popolazione. Ma una dimensione eccessivamente grande della popolazione, comporta un costo computazionale eccessivo in termini di memoria e tempo. Una dimensione di circa 100 individui, in genere, viene frequentemente utilizzata in letteratura tecnica, ma nel presente lavoro si

è scelto di utilizzare una dimensione di 300 individui, in quanto, non è possibile conoscere a priori se una soluzione rispetta i vincoli, quindi è necessario avere un numero di individui abbastanza elevato affinché si abbia una buona probabilità che una soluzione generata ricada nello spazio delle soluzioni delimitato dai vincoli. Va precisato che, la probabilità che un individuo ricada all'interno del dominio delimitato dai vincoli, cresce con l'avanzare delle iterazioni. Infatti per lo “*Schema Theorem*” di *Holland* (1975) la presenza dei geni buoni nel pool genetico della popolazione, va aumentando di generazione in generazione, quindi le soluzioni che rispettano i vincoli, aumenteranno all'avanzare delle generazioni. Quest'ultima cosa, suggerisce di variare la dimensione della popolazione, riducendola dopo un certo numero di iterazioni, tuttavia, nel presente lavoro, si è scelto di mantenere costante il numero di individui fino alla fine del processo.

5.7 LA FITNESS

La Fitness di un individuo è il valore che assume la funzione obiettivo, più eventuali penalizzazioni dovute al superamento dei vincoli imposti, per il suo fenotipo. Nel presente lavoro, l'oggetto dell'ottimizzazione sono le reti di drenaggio e, dunque, al fine di valutare la fitness di un singolo individuo, è necessario utilizzare un algoritmo di simulazione idraulica di moto vario. Quindi è necessario conoscere il fenotipo, ovvero i valori delle quote di scavo, le dimensioni geometriche delle sezioni ecc.

La fitness indica non solo quanto è buona una soluzione, ma indica anche quanto un cromosoma è vicino a quello ottimale.

5.8 FITNESS UTILIZZATA PER LE RETI DI DRENAGGIO RURALI

Per le reti di drenaggio rurali, si fa riferimento, molto frequentemente, a reti con canali a sezione trapezia semplice o, eventualmente, banchinata, e pendenza delle sponde assegnata a priori. Nel presente lavoro, sono state considerate, a titolo esemplificativo, solo sezioni di forma semplicemente trapezia, con pendenza delle sponde fissate e pari a 45° . Le variabili decisionali scelte sono le larghezze di base dei canali B , le pendenze di fondo dei canali i e la quota Z_v della sezione terminale della rete (assegnate le quali,

nell'ipotesi di assenza di salti di fondo, è possibile determinare le $Z_{k,m}$ quote di tutti i nodi a monte dei tratti, dove k è il generico tratto della rete).

La ricerca della rete ottimale consiste nella ricerca di un set di valori delle suddette variabili tale da garantire, contemporaneamente, capacità di convogliamento sufficienti anche per le portate al colmo di piena, il mantenimento dei franchi di buona coltivazione, la stabilità nei confronti dei fenomeni erosivi e, nel contempo, il soddisfacimento di un prefissato criterio, quale quello di minimo costo complessivo di realizzazione e di gestione.

Per ciascun individuo (ossia, per ciascuna possibile soluzione del problema), deve essere costruita la funzione di fitness, mediante la quale, ad ogni soluzione, si associa un singolo valore numerico (*fitness-score*), che si suppone indicativo della capacità dell'individuo di sopravvivere. In particolare, per ogni individuo, caratterizzato da fissati valori delle larghezze di base B_k dei singoli rami della rete (con $k = 1, 2, \dots, N$, dove N rappresenta il numero di rami che costituiscono la rete), delle pendenze di fondo dei rami i_k (con $k = 1, 2, \dots, N$) e della quota della sezione di valle Z_v , la funzione di fitness (*F.F.*) sarà la somma di una *funzione Costo della Rete* e di una *funzione Penalità* indicativa del rispetto dei vincoli.

La *funzione Costo della Rete* (C_{rete}) è determinata, partendo dalle caratteristiche geometriche dell'individuo, computando tutti i costi di realizzazione sotto elencati:

- il costo dello scavo, funzione delle sezioni trasversali dei vari tronchi, delle quote di scavo a monte e a valle, delle caratteristiche del terreno in cui si effettua lo scavo e della localizzazione dello scavo. In accordo a quanto previsto da diversi prezziari, gli scavi di profondità maggiore ai 2 m sono stati caratterizzati da costi unitari maggiorati;
- il trasporto a rifiuto, comprensivo dei relativi oneri di scarica, funzione del volume di materiale scavato e della distanza del cantiere dal luogo di scarico.

La *funzione Penalità* si pone, quale obiettivo, quello di individuare e di portare in conto un ulteriore costo (quello cosiddetto 'sociale'), incrementando il valore della funzione di fitness per quegli individui che non soddisfano una o più di alcune preassegnate condizioni di efficienza prestazionale (che corrispondono alle condizioni imposte dai vincoli del problema) che possono essere così schematizzate:

- a) Il non verificarsi di fenomeni di esondazione:

$$h_{s,T} \leq H_s \quad (\text{con } s = 1, 2, \dots, S)$$

dove è stato indicato con $h_{s,T}$ il valore del massimo annuale del tirante idrico istantaneo che viene superato, mediamente, ogni T anni (con T periodo di ritorno assegnato), nella generica sezione s di interesse, e con H_s la massima profondità di scavo in corrispondenza della stessa sezione della rete (assunta positiva nel caso di abbassamento del fondo alveo al di sotto del piano campagna);

- b) Il non superamento del ‘*franco di buona coltivazione*’ necessario a garantire la presenza, sui terreni ai lati dei vari rami della rete, di preassegnate colture, allorquando vi defluiscano portate ‘*frequenti*’, ovvero portate che si possono realizzare più volte durante l’anno, senza essere provocate da eventi meteorici di rilievo. Indicato con f_s il franco di buona coltivazione che si intende mantenere in corrispondenza della generica sezione di interesse della rete, e con $(h_{freq})_s$ il tirante idrico massimo che si realizza nella stessa sezione in corrispondenza del deflusso della portata “frequente”, deve verificarsi che

$$[(h_{freq})_s + f_s] \leq H_s \quad (con \quad s = 1, 2, \dots, S)$$

- c) Il non verificarsi di fenomeni erosivi in grado di compromettere la stabilità delle sezioni, e, quindi, tali da comportare elevati costi di gestione e manutenzione. Indicate con $(v_{freq})_s$ la massima velocità media di deflusso delle portate ‘frequenti’ che si realizza in corrispondenza della generica sezione s di interesse, e con $(v_{lim})_s$ la velocità limite oltrepassata la quale possono innescarsi, in quella stessa sezione, fenomeni erosivi, deve risultare che:

$$(v_{freq})_s \leq (v_{lim})_s \quad (con \quad s = 1, 2, \dots, S)$$

- d) Il non verificarsi di incongruenze ‘topografiche’, nel senso che, all’atto della generazione casuale delle pendenze dei diversi rami (scelte in modo casuale all’interno del set di variabili decisionali), partendo da una determinata quota di fondo canale nella sezione terminale della rete, e ricavando a ritroso la quota di fondo canale $(Quota_{fondo,k})$ in corrispondenza della sezione di monte di tutti gli N rami della rete, non dovrebbe mai verificarsi che tale quota risulti maggiore della corrispondente quota del piano campagna $(Quota_{pc,k})$, per cui deve risultare:

$$(Quota_{fondo,k}) < (Quota_{pc,k}) \quad (con \quad k = 1, 2, \dots, N)$$

- e) Se si indicano con k il generico canale, con t il generico canale in esso confluyente e con nc il numero totale dei canali confluenti nel canale k , la larghezza B_k di ogni canale deve risultare, per evidenti motivi funzionali, non inferiore alle larghezze B_t di tutti i canali in esso confluenti:

$$\forall t \quad (B_k) \geq (\max B_t); \quad (t = 1, \dots, nc); \quad (k = 1, \dots, N).$$

In conclusione, la funzione di fitness F.F., implementata nella procedura proposta per l'ottimizzazione delle reti di drenaggio rurali, ha la seguente espressione:

$$\begin{aligned} F.F. = & C_{rete} + \sum_{s=1}^S p^{capacità} [\max(0, h_{s,T} - H_s)] + \\ & + \sum_{s=1}^S p^{franco} \{ \max[0, (h_{freq})_s + f_s - H_s] \} + \\ & + \sum_{s=1}^S p^{vel} \{ \max[0, (v_{freq})_s - (v_{lim})_s] \} + \\ & + \sum_{s=1}^S p^{exc} [\max(0, -H_s)] + \sum_{k=1}^N p_k^{base} \end{aligned} \quad (5.1)$$

nella quale i coefficienti $p_{capacità}$, p_{franco} , $p_{erosione}$, p_{vel} , rappresentano, rispettivamente, le 'penalità specifiche' per eventuale esondazione della sezione, per mancato rispetto del franco di buona coltivazione, per superamento delle velocità v_{lim} oltre le quali si innescano fenomeni erosivi, e per un virtuale innalzamento delle quote di fondo alveo al di sopra del piano campagna, mentre p_k^{base} è la penalità, assegnata al ramo k -esimo, relativa al mancato rispetto del vincolo per il quale la larghezza di base di un tratto deve essere non inferiore a quella dei tratti in esso confluenti: tale valore di penalità risulta, ovviamente, nullo nei tronchi in cui tale vincolo è soddisfatto.

5.9 FITNESS UTILIZZATA PER LE RETI URBANE DI DRENAGGIO

Per le reti urbane di drenaggio, si fa riferimento ad una rete 'mista', con sistema di smaltimento 'unitario'.

In analogia a quanto detto per le reti rurali di drenaggio, le variabili del problema sono i diametri D_k dei singoli rami della rete (con $k = 1, 2, \dots, N$, dove N rappresenta il numero di tratti che costituiscono la rete), le pendenze di fondo dei tratti i_k (con $k = 1, 2, \dots, N$) e la quota della sezione di valle Z_v ; anche in questo caso, la funzione di fitness (F.F.) sarà somma di una *funzione Costo della Rete* e di una *funzione Penalità*.

La *funzione Costo della Rete* (C_{rete}) rappresenta il costo per la realizzazione e la posa in opera dei collettori della rete; esso è funzione delle lunghezze L_k (con $k=1, 2, \dots, N$ ed N numero complessivo dei rami) dei singoli rami, dei diametri D_k (da cui dipende, a sua volta, il costo unitario della condotta in opera, comprensivo dell'incidenza dei pozzetti di testata, di confluenza e di ispezione, e dell'incidenza delle caditoie stradali), del costo a metro cubo dello scavo (che, a sua volta, dipende dalle quote di scavo nei nodi di monte e di valle dei vari tratti della rete, deve essere eventualmente incrementato laddove gli scavi superino la profondità di $2m$ rispetto al piano campagna), del costo della demolizione e del successivo rifacimento del pacchetto stradale, del costo di trasporto a rifiuto e dei relativi oneri di discarica del materiale scavato, del costo dei rinterri.

Come nel caso delle reti di bonifica, la *funzione Penalità* si pone l'obiettivo di 'penalizzare' le soluzioni che non soddisfano i vincoli del problema, intesi come gli standard di prestazione minimi prefissati, che vengono, qui di seguito, descritti:

- il massimo istantaneo del tirante idrico $h_{s,T}$ che può essere superato, mediamente, ogni T anni nella generica sezione s di interesse ($s = 1, 2, \dots, S$), valutato in base alla procedura variazionale accoppiata ad un adeguato modello idrologico semi-distribuito, non sia superiore al massimo valore imposto al tirante idrico $(h_{lim})_s$; quest'ultimo, nel caso di condotti circolari, è valutato considerando, per diametri non inferiori al DN 800, un massimo grado di riempimento pari a 0,9 e, per diametri inferiori al suddetto DN, in base alla differenza come $D_k - 0,08 m$, in modo da garantire, sempre e comunque, sia una buona areazione dei condotti, sia la possibilità di trasportare, senza che il condotto vada in pressione, piccoli corpi galleggianti affluiti alla rete, sia di massimizzare la capacità di smaltimento delle portate in arrivo da monte. Ragionamenti analoghi potrebbero, ovviamente, essere applicati per condotti di forma diversa da quella circolare;
- il valore della velocità, calcolata in corrispondenza del deflusso della portata di punta nera $v_{pn,s}$, sia maggiore della velocità di auto pulitura v_{min}^{limite} , assunta spesso pari a 0,6 m/s; in tale caso, la penalità specifica introdotta nella funzione di fitness è rappresentativa di un costo aggiuntivo capitalizzato degli interventi di manutenzione ordinaria, per portare in conto i periodici fenomeni di occlusione dei o dei collettori e i relativi interventi; essa è stata stimata,

relativamente ad una durata tecnico-economica della rete di 20 anni, pari a 1'500,00 euro a metro lineare di condotta per ogni riduzione della velocità massima pari a 0,10 m/s;

- il valore della velocità $v_{s,T}$ corrispondente al periodo di ritorno T , non deve superare la massima velocità ammissibile v_{\max}^{limite} (spesso assunta pari a 5 m/s);
- il cielo fogna del collettore fognario non deve trovarsi troppo prossimo al piano campagna, per cui, sulla tubazione, in ogni punto, deve esserci un ricoprimento minimo r_{\min} (spesso assunto pari a 0,5 m); ciò impone che la quota del cielo fogna $[(Quota)_{\text{fondo},s} + D_k]$ non sia superiore ad una quota limite $Quota_{\text{limite}} = Quota_{\text{terreno},s} - r_{\min}$;
- la profondità di scavo H_s^{scavo} in corrispondenza di ogni sezione di controllo non deve eccedere un valore limite prefissato H_{\max}^{scavo} (assunto spesso pari a 4 m, al fine di portare in conto che, per elevate profondità, tali opere, oltre a diventare particolarmente onerose, possono portare ad una serie di problemi esecutivi, quali interferenze con le linee di influenza delle fondazioni degli edifici circostanti, probabile interferenza con la falda e necessità di sistemi di blindaggio dello scavo);
- in analogia con quanto già indicato al punto d) del paragrafo 2.1, il non verificarsi di incongruenze ‘topografiche’;
- in accordo con quanto già proposto da Peng e Jia (2004), indicati con k il generico collettore, con t il generico collettore in esso confluyente e con nc il numero totale dei collettori confluenti nel ramo k , il diametro D_k di ogni collettore deve risultare, per evidenti motivi di funzionalità, non inferiore ai diametri D_t di tutti i canali in esso confluenti:

$$\text{Per ogni confluyente } t \quad (D_k) \geq (\max D_t) \quad (\text{con } t = 1, \dots, nc), \quad (\text{con } k = 1, \dots, N) \quad (8)$$

La funzione di fitness $F.F.$ è, anche in questo caso, data dalla somma del costo della rete e di una serie di termini che portano in conto le penalità connesse con il mancato soddisfacimento delle condizioni di vincolo sopra indicate:

$$\begin{aligned}
F.F. = & C_{rete} + \sum_{s=1}^S p^{capacità} [\max(0, h_{s,T} - (h_{lim})_s)] + \\
& + \sum_{s=1}^S p_{min}^{velocità} [\max(0, v_{pn,s} - v_{min}^{limite})] + \\
& + \sum_{s=1}^S p_{max}^{velocità} [\max(0, v_{s,T} - v_{max}^{limite})] + \\
& + \sum_{s=1}^S p_{min}^{scavo} [\max(0, Quota_{fondo,s} + D_k - Quota_{limite})] + \\
& + \sum_{s=1}^S p_{max}^{scavo} [\max(0, H_s^{scavo} - H_{max}^{scavo})] + \\
& + \sum_{s=1}^S p^{scavo} [\max(0, -H_s)] + \sum_{k=1}^N p_k^{diametro}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

In tale espressione, i simboli introdotti hanno il seguente significato:

- $p^{capacità}$ è la *penalità specifica* legata al superamento, da parte del massimo istantaneo del tirante idrico che si realizza, nella s -esima sezione di interesse della rete, in corrispondenza del periodo di ritorno T di progetto, del valore limite $(h_{lim})_s$;
- $p_{min}^{velocità}$ è la *penalità specifica* legata al non superamento, da parte della velocità $v_{pn,s}$ calcolata nell' s -esima sezione di controllo in corrispondenza del deflusso della portata nera di punta, della minima velocità di autopulitura v_{min}^{limite} ;
- $p_{max}^{velocità}$ è la *penalità specifica* relativa al superamento, da parte della velocità $v_{s,T}$, relativa alla sezione s e al periodo di ritorno T , del valore massimo ammissibile v_{max}^{limite} ;
- p_{min}^{scavo} è la *penalità specifica* relativa ad un valore troppo esiguo della profondità di ricoprimento della tubazione;
- p_{max}^{scavo} è la *penalità specifica* connessa al superamento, da parte della profondità di scavo, del prefissato valore della profondità massima di scavo;
- p^{scavo} è la *penalità specifica* relativa alle eventuali incongruenze topografiche delle reti di drenaggio generate nel corso del processo di ottimizzazione;
- $p_k^{diametro}$ è la *penalità* assegnata al singolo ramo della rete nel caso in cui esso abbia diametro maggiore a quello del collettore in cui confluisce.

5.10 LA SELEZIONE

Secondo la teoria evoluzionistica di *Darwin*, i migliori individui, di una specie vivente, sopravvivono creando nuovi discendenti, tramite un processo di selezione naturale. Analogamente all'interno del GA è presente la procedura di *Selezione*. L'obiettivo della selezione è quello di enfatizzare gli individui più idonei, di una data popolazione, con la speranza che i loro discendenti abbiano valori migliori della funzione di fitness, quindi più basso (o più alto) è il valore della funzione di fitness, maggiore sarà la probabilità, che ha un individuo, di essere scelto per produrre dei discendenti. L'operatore di selezione, quindi, determina quali sono gli individui da inserire nella *Mating-Pool* (vasca di accoppiamento), per generare una nuova popolazione, dove il numero di individui da inserire nella *Mating-Pool* dipende dalla pressione di selezione. Essa è definita come la misura in cui gli individui migliori sono favoriti per l'accoppiamento. Più alto è il valore di tale pressione, più gli individui migliori saranno favoriti e, quindi, minore sarà il numero di individui inseriti nella *Mating-Pool*. Tale pressione di selezione, guida il GA verso il miglioramento della fitness media della popolazione di generazione in generazione, di conseguenza la velocità di convergenza del GA è fortemente influenzata da essa, corrispondendo ad alte pressioni alte velocità di convergenza. Di contro una pressione selettiva eccessivamente alta può portare il GA a convergere prematuramente ad una soluzione incorretta (sub-ottima). Quindi un buon schema selettivo deve avere una pressione tale da conservare un certo livello di diversità all'interno della popolazione al fine di evitare convergenze premature.

Tipicamente si può distinguere tra due tipi di procedure di selezione:

1. Proportional-Based: Un individuo può viene scelto in base al valore che la sua fitness assume rispetto alla fitness degli altri individui, quindi tale tipo di procedura porta in conto la distribuzione della fitness all'interno della popolazione;
2. Ordered-Based: Un individuo è selezionato solo in base alla posizione che occupa a valle di un ordinamento (*sorting*) degli individui basato sul valore della fitness. Ciò significa che la pressione di selezione non dipende da come è distribuita la fitness della popolazione, ma soltanto dalla posizione di un individuo (*Ranking*) nell'array ordinato in base al valore della fitness.

Si riportano nei seguenti sottoparagrafi le *Selection procedure* più utilizzate.

5.10.1 Roulette Wheel Selection

La *Roulette Wheel Selection* è una tecnica di selezione tradizionale nell'ambito dei GA. Il principio di funzionamento di tale tecnica, è ispirato a quello di una Roulette Russa, dove al posto dei numeri vi sono gli individui e l'ampiezza delle fessure (che corrisponde alla probabilità che ha un individuo di essere selezionato) è proporzionale al valore della sua fitness. Fissato un valore obiettivo, che è una porzione casuale della somma delle fitness della popolazione, viene eseguita una ricerca lineare fino a che tale valore non viene raggiunto.

La *Roulette Wheel Selection* è una tecnica caratterizzata da una pressione di selezione moderata, in quanto non garantisce che gli individui con fitness migliore siano selezionati, ma comunque possiedono una probabilità maggiore rispetto agli individui meno idonei. La caratteristica essenziale è che la popolazione non viene ad essere ordinata in base al valore della fitness, poiché ciò pregiudicherebbe drammaticamente la procedura di selezione.

La tecnica fin ora descritta può essere implementata nella seguente maniera:

1. Per ogni individuo, si calcola la probabilità di selezione, rapportando il valore della fitness di ogni individuo alla fitness totale della popolazione.
2. Si sommano le probabilità di tutti gli individui ottenendo un certo valore T .
3. Si itera N volte, con N pari al numero degli individui costituenti la popolazione, quanto segue:
 - a. Si estrae un numero casuale r compreso tra 0 e T ;
 - b. Si estraggono individui in maniera casuale, sommando le probabilità di ogni individuo estratto fino a che la somma non è maggiore di r . L'ultimo individuo estratto, ovvero quello che ha portato la somma ad un valore maggiore di r , è quello selezionato per la *Mating-Pool*.

La tecnica appena descritta funziona bene quando non ci sono enormi differenze tra le probabilità di selezione degli individui. Ad esempio se un individuo ha una probabilità di mutazione del 90%, occuperà una porzione della roulette del 90%, e quindi vi è il rischio che il GA vada a convergenza prematura. Inoltre, la presente, per come è concepita, risulta più adatta a problemi di massimizzazione. Nei casi appena menzionati, è dunque opportuno fare ricorso ad altre tecniche di selezione.

5.10.2 Rank Selection

La *Rank Selection* è una tecnica del tipo Ordered-Based. Infatti ad ogni individuo viene assegnato un rango (*rank*) in base al valore della fitness. L'individuo con la fitness peggiore avrà rango N , con N pari al numero di individui della popolazione, quello con la fitness migliore rango 1 . A questo punto all'individuo migliore viene assegnato un numero di copie, da inserire nella *mating-pool*, maggiore rispetto agli individui di rango più basso (Goldberg 1989).

La presente tecnica di selezione può essere implementata come segue:

1. Si stabilisce la legge di variazione del numero di copie di un individuo, da inserire nella *mating-pool* in base al rango (ad esempio si può scegliere una variazione lineare, assegnando il numero di copie massimo all'individuo di rango 1 e una sola copia all'ultimo individuo, o una legge di tipo esponenziale);
2. A partire dall'individuo di rango 1 si inizia ad immettere le copie nella *mating-pool* fino a che essa non è piena;

La tecnica appena descritta, a differenza della *Roulette Wheel Selection*, è indipendente dalla varianza della fitness all'interno della popolazione, quindi riduce la dominanza degli individui dotati di fitness significativamente migliori, ma allo stesso tempo aumenta il divario tra individui dotati di fitness molto vicine in termini di valore, mantenendo alta la pressione di selezione. Va comunque sottolineato che anche se la *Rank-Selection* viene usata con successo, essa ignora l'informazione derivante dalla differenza tra le fitness degli individui, di conseguenza viola lo *Schema Theorem* di Holland.

5.10.3 Tournament Selection

Esistono in letteratura scientifica molte varianti della *Tournament Selection*. La più comune è quella di fissare un certo numero k di partecipanti ad un ipotetico torneo e, quindi, estrarre in maniera casuale k individui all'interno della popolazione. L'individuo che possiede la fitness migliore tra i k partecipanti, viene inserito nella *mating-pool*. Quindi la tecnica appena descritta è costituita dai seguenti passi:

1. Si fissa un numero intero k ;
2. Si itera, fino al riempimento della *mating-pool* quanto segue;

- a. Si estraggono in maniera casuale k individui;
- b. Si confrontano le fitness dei k partecipanti come se fosse un torneo ad eliminazione e si inserisce nella *mating-pool* il vincitore del confronto.

Nella presente tecnica, la pressione selettiva è fornita dalla differenza tra le fitness degli individui, la quale, indirizza il GA verso il miglioramento della fitness media di generazione in generazione, facendo risultare la *Tournament Selection* una tecnica molto efficiente.

5.11 IL CROSSOVER

Il *crossover* è l'operazione consistente nel selezionare casualmente due individui genitori (*parents*) di una popolazione, al fine di generare dei discendenti. A valle della procedura di selezione, solitamente, nella *mating-pool* sono presenti individui con una fitness superiore alla media della popolazione alla quale appartengono. Quindi gli individui sopravvissuti alla selezione, vengono combinati, nella speranza che la nuova generazione abbia una fitness media migliore della precedente. Nei sottoparagrafi che seguono vengono descritte le tecniche di crossover più tradizionali, per una descrizione delle tecniche non tradizionali si rimanda a Michalewicz (1992) e Dumitrescu et al. (2000).

5.11.1 Single-point Crossover

Il *single-point crossover* rappresenta la maniera più tradizionale con la quale effettuare il *crossover* in quanto i primi GA sono stati implementati con la presente tecnica. Essa consiste nel prendere, in maniera casuale, due genitori dalla *mating-pool* ed estrarre, sempre in maniera casuale, un numero compreso tra 0 ed il numero massimo di bit costituenti la stringa del cromosoma, che rappresenta la posizione di taglio dei cromosomi. In tal modo si vengono a creare due teste e due code dei cromosomi provenienti dai due genitori. Successivamente, le teste e le code, vengono combinate tra loro in maniera tale da generare due discendenti come schematizzato nella figura che segue.

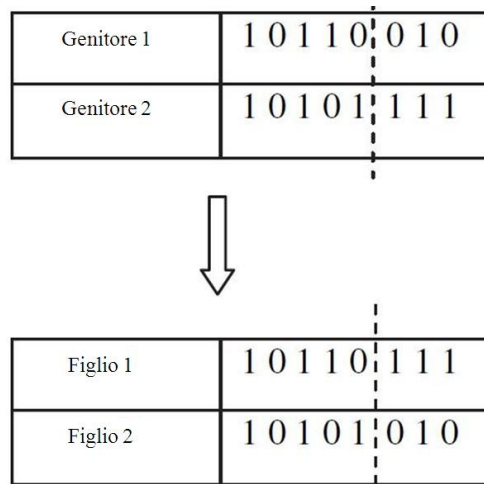


Fig.5.3 schematizzazione del single-point crossover.

4.11.2 Two-point Crossover

La presente tecnica di *crossover*, consiste nel generare due punti di taglio in maniera casuale e scambiare, tra i due genitori, i segmenti di cromosoma compresi tra i tagli come mostrato in fig.5.4.

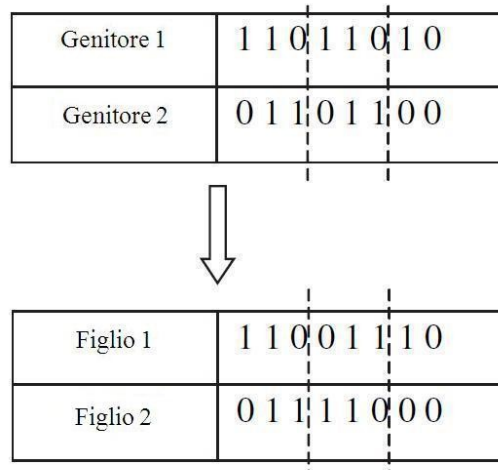


Fig.5.4 schematizzazione del two-point crossover

Nei primi GA veniva fatto uso del *single-point crossover*. In tale tecnica le informazioni possedute dalla testa e dalla coda, dei cromosomi scambiati, non possono essere passate insieme ai figli, di conseguenza se un cromosoma contiene buone informazioni genetiche, sia nella testa che nella coda, nessuno dei discendenti condividerà con il genitore le due buone caratteristiche.

L'utilizzo del *two-point crossover* permette di evitare tale inconveniente, tanto da essere considerato, generalmente, una tecnica migliore del *single-point*. Infatti due buone caratteristiche rappresentate da geni di posizione adiacente o abbastanza vicina all'interno del cromosoma, hanno più possibilità di essere trasmessi ai figli con il *two-point crossover* piuttosto che con la tecnica descritta nel precedente sottoparagrafo. Tuttavia l'efficienza della presente tecnica è strettamente correlata alla posizione dei geni all'interno del cromosoma in quanto, al fine di ottenere miglioramento della specie attraverso i discendenti, è necessario che le caratteristiche buone, siano codificate tramite geni vicini tra loro nei cromosomi. Al fine di rendere l'efficienza del *crossover* indipendente dalla posizione dei geni, può essere fatto uso della tecnica denominata *uniform crossover*.

5.11.3 Uniform Crossover

Lo *Uniform Crossover* è una tecnica di ricombinazione delle soluzioni abbastanza differente da quelle precedentemente descritte. Infatti in tale tipologia di *crossover* i bit costituenti i cromosomi dei discendenti, vengono copiati da uno dei due genitori secondo una *crossover mask* (maschera di accoppiamento), ovvero una stringa di bit, generata in maniera casuale, di lunghezza uguale a quella dei cromosomi degli individui.

Scelti casualmente due genitori dalla *mating pool*, viene generata la suddetta *crossover mask*. Per ogni bit nella maschera, i bit costituenti i cromosomi dei discendenti, vengono generati secondo le seguenti regole:

- Se il valore di un bit in una determinata posizione della maschera è 1, al primo discendente viene copiato il bit del primo genitore, al secondo viene copiato il bit del secondo genitore;
- Se il valore di un bit in una determinata posizione della maschera è 0, al primo discendente viene copiato il bit del secondo genitore, al secondo viene copiato il bit del primo genitore.

La figura che segue, costituisce un esempio di applicazione della tecnica appena descritta.

Genitore 1	1 0 1 1 0 0 1 1
Genitore 2	0 0 0 1 1 0 1 0
Mask	1 1 0 1 0 1 1 0
Figlio 1	1 0 0 1 1 0 1 0
Figlio 2	0 0 1 1 0 0 1 1

Fig.5.5 schematizzazione del single-point crossover

Il crossover uniforme è sicuramente una tecnica distruttiva nei riguardi dei *Building Blocks* (si veda 5.14 per la definizione dei *Building Blocks*). Ciò significa che sequenze di geni, che costituiscono una buona soluzione, vengono ad essere distrutte con una probabilità elevata, in quanto i cromosomi di due discendenti, risultano essere un miscuglio casuale dei bit appartenenti ai cromosomi dei genitori. Per tale motivo, l'uso del crossover uniforme all'interno del GA, provoca velocità di convergenza molto più basse, in quanto la frequenza con la quale i geni buoni compaiono nella popolazione, rimane bassa per un numero di iterazioni molto più lungo rispetto alle tecniche di crossover precedentemente descritte. Tuttavia, tale tecnica, garantisce un'esplorazione dello spazio delle soluzioni molto più ampia rispetto alle tecniche dei paragrafi precedenti. Inoltre l'efficacia dello *Uniform Crossover* viene incrementata drasticamente, se all'interno del GA si fa uso di schemi di rimpiazzo come l'*Elitismo*.

5.12 MUTAZIONE

Immediatamente dopo l'operazione di *crossover*, nel GA, interviene la *Mutazione*. Come per l'evoluzione delle specie viventi, esiste certa probabilità che alcuni individui possano mutare il proprio codice genetico a causa dell'influenza dell'ambiente circostante, anche nel GA è concesso ad alcuni geni di mutare secondo una certa probabilità di mutazione (*mutation probability*). La mutazione è tradizionalmente considerata un semplice operatore di ricerca. Essa gioca il ruolo di disturbare l'informazione genetica ed allo stesso tempo costituisce un rimedio contro la perdita irreversibile di geni che potrebbero aiutare a costruire una buona soluzione. Mentre il

crossover sfrutta le soluzioni di una data popolazione per ottenere delle nuove soluzioni migliori delle precedenti, la mutazione permette al GA di non evolvere verso una soluzione *Sub-Ottima*, ovvero, essa garantisce l'esplorazione di tutto lo spazio delle soluzioni, evitando che il GA, resti intrappolato in un punto di massimo o minimo locale.

Essa assicura la diversità della popolazione mantenendo ben fornito il *pool* genetico e, quindi, garantendo *Ergodicità* allo spazio di ricerca. Si ricorda che uno spazio di ricerca si dice *Ergodico* se vi è una probabilità non nulla di generare qualunque soluzione da un qualsiasi stato della popolazione.

Esistono varie procedure di mutazione per i diversi tipi di rappresentazione. Per la rappresentazione binaria, una mutazione tipica può consistere nella semplice inversione del valore di un gene secondo una piccola probabilità. Ad esempio la tecnica *Flipping Mutation*, consiste nel generare, per ogni individuo, un cromosoma di mutazione, estraendo in maniera casuale, per un numero di volte pari alla lunghezza del cromosoma, un numero r compreso tra $[0,1]$. Se tale numero è inferiore alla probabilità di mutazione p_m (presa in genera pari a 0.01, 0.001, oppure $1/L$ dove L è la lunghezza del cromosoma), il cromosoma di mutazione avrà 1, in caso contrario 0. Dopodiché, per ogni individuo, ove il cromosoma di mutazione, ad esso associato, presenti bit di valore 1, allora i corrispondenti bit dell'individuo verranno invertiti (i bit di valore 0 diventano 1 e viceversa. Laddove il cromosoma di mutazione presenta bit di valore 0, i corrispondenti bit dell'individuo restano immutati come mostrato nella figura che segue.

Individuo	1 0 1 1 0 1 0 1
Cromosoma di mutazione	1 0 0 0 1 0 0 1
Individuo Mutato	0 0 1 1 1 1 0 0

Fig.5.6 Flipping Mutation.

La tecnica appena descritta funziona molto bene ma, comunque, richiede un certo costo in termini tempo e memoria computazionale. Per velocizzare l'operazione di mutazione, può essere utilizzato un ragionamento basato sulla media dei bit mutati.

Data una certa probabilità di mutazione p_m , una popolazione fatta da N_i individui rappresentati da cromosomi costituiti da N_b bit. Mediamente, ad ogni iterazione del GA, muteranno $p_m \times N_i \times N_b$, quindi, in ogni individuo, si avrà una mutazione media di $p_m \times N_b$ bit. Seguendo questo ragionamento, per ogni individuo, vengono cambiati i valori di $p_m \times N_b$ bit presi in maniera casuale all'interno del cromosoma. Quest'ultima tipologia di mutazione (*Mean Mutation*), da un lato presenta lo svantaggio di essere eccessivamente distruttiva nel riguardo dei *building blocks* e può provocare problemi di convergenza, in quanto tutti i cromosomi della popolazione subiscono mutazioni di alcuni bit, dall'altro lato consente una maggiore esplorazione dello spazio delle soluzioni e risulta essere meno onerosa dal punto di vista computazionale.

Per i motivi suddetti, la *Mean Mutation*, non può essere implementata in un GA con schemi di rimpiazzo tradizionali, come il *Generational Replacement*, ma deve essere utilizzata congiuntamente a schemi di rimpiazzo tali che non tutti gli individui della nuova popolazione subiscano mutazioni, ad esempio utilizzando l'*Elitismo* come schema di ricambio.

5.13 IL RICAMBIO GENERAZIONALE (GENERATIONAL REPLACEMENT ED ELITISMO)

Dopo la creazione di nuovi discendenti mediante il crossover e la mutazione, resta da stabilire quali candidati soluzione faranno parte della nuova generazione. Nell'ambito delle strategie evolutive, questo fatto, determina la longevità degli individui ed influisce sostanzialmente sulla convergenza del GA. Come per tutti gli operatori del GA, in letteratura scientifica, sono presenti svariati schemi di ricambio, tuttavia gli schemi di ricambio prevalentemente utilizzati nelle applicazioni sono sostanzialmente due, ovvero il *Generational Replacement* e l'*Elitismo*, che possono essere sintetizzati come segue:

- *Generational Replacement* (ricambio generazionale): Tale meccanismo è forse il più classico nell'ambito dei GA. Tutti gli individui, costituenti una determinata popolazione, vengono rimpiazzati con i propri discendenti. Con l'utilizzo di questo schema può accadere che la fitness degli individui migliori (ma non la fitness media della popolazione), peggiori in certi stadi

dell'evoluzione, inoltre tale schema mette in risalto il dominio di pochi individui che possono contribuire ad evitare convergenze premature.

- *Elitismo*: L'individuo migliore o un gruppo di n individui caratterizzati dall'avere le migliori fitness, all'interno della popolazione, vengono mantenuti nella generazione successiva e ad essi non viene applicata la mutazione. Tale strategia può, teoricamente, portare all'immortalità di alcuni individui ed essere critica nei riguardi della convergenza prematura, in particolar modo, quando il numero di individui dell'elitismo è troppo alto. Il tipo di elitismo più classico e più utilizzato è quello in cui $n=1$ e viene denominato *Golden Cage Model* (modello della gabbia dorata). Quando n è alto, al fine di evitare la convergenza prematura, la mutazione può essere applicata anche all'elite di individui. In tal caso l'elitismo prende il nome di *Weak Elitism*, ovvero *Elitismo Debole*.

Nel presente lavoro si è fatto uso dell'*Elitismo* con $n=5$. La scelta di un tale numero di individui elite, non compromette la convergenza dell'algoritmo in quanto si è scelto un numero di individui, costituenti la popolazione, è $n_p=500$. Di conseguenza solo l'1% degli individui migliori viene mantenuto nella nuova generazione. Inoltre l'elitismo permette di bilanciare l'effetto distruttivo della *mean mutation* sui *Building Blocks*.

5.14 BASI TEORICHE DEI GA: IL CONCETTO DI “SCHEMATA”, L'IPOTESI DEI “BUILDING BLOCKS” E LO “SCHEMA THEOREM”.

Il miglior modo per descrivere i fondamenti teorici dei GA, è quello di utilizzare il codice binario, come originariamente fatto da *Holland* (1975).

Nel lavoro originale di *Holland*, la “schemata” viene rappresentata utilizzando l'alfabeto dei geni (ovvero il codice binario) per indicare le componenti fisse, con l'aggiunta del simbolo #, che in gergo viene detto “*Wildcard*”, per indicare le componenti della stringa che possono assumere valori variabili (per esempio: 10##0###).

Una “*schemata*” può essere definita come una varietà affine dello spazio di ricerca, oppure, in maniera più semplice, come l'insieme delle stringhe dello spazio di ricerca che corrispondono allo schema in tutte le componenti ad eccezione delle “*Wildcard*”. Per chiarire meglio le idee è opportuno considerare il seguente esempio: si consideri la

sequenza 01##11#0, essa è un sottospazio dello spazio dei codici a 8 bit. Tutte le stringhe di tale spazio, che hanno gli stessi valori ad eccezione delle #, che possono valere 0 oppure 1, costituiscono una “*schemata*”. Prima di procedere alla deduzione dello “*Schema Theorem*” è opportuno dare alcune definizioni.

data una generica “*schemata*” S , si definisce la lunghezza della “*schemata*” $\delta(S)$, la distanza tra la prima e l’ultima cifra fissa (Ad esempio, se $S = ##01#10#$ allora $\delta(S) = 4$), essa è un indice di quanto è compatta l’informazione contenuta in uno schema. Si definisce ordine di una “*schemata*” $O(S)$ il numero delle componenti fisse presenti in essa. Sia $val(S, t)$ il valore medio della fitness della “*schemata*” S alla generazione t -esima, ovvero la fitness media degli individui che corrispondono alla *schemata* S . Si indicano, inoltre, con $F(t)$ ed $N(t)$, rispettivamente, la fitness totale della generazione t -esima e il numero di individui della popolazione alla t -esima generazione. Infine, si indica, con $P(t)$ la generica popolazione corrispondente alla generazione t -esima. Lo “*Schema Theorem*” è stato dedotto da Holland (1975) considerando un GA classico, ovvero implementato con selezione di tipo *Proportional Based (Roulette Wheel Selection)*, *single-point crossover* e *Bit-by-Bit mutation (Flipping Bit)*, per questo motivo nella seguente si fa riferimento agli operatori appena menzionati.

La probabilità che ha un individuo k di essere scelto è pari a $val(k)/F(t)$. Dunque, indicato con $\xi(S, t)$, l’insieme degli individui corrispondenti alla “*schemata*” S nella generazione t , la probabilità che un individuo facente parte dell’insieme $\xi(S, t)$ venga selezionato è pari a:

$$\xi(S, t+1) = \xi(S, t) \cdot N(t) \cdot \frac{val(S, t)}{F(t)} = \xi(S, t) \cdot \frac{val(S, t)}{\bar{F}(t)} ; \quad (5.3)$$

Dove $\bar{F}(t) = F(t)/N(t)$ rappresenta la fitness media della popolazione.

La (5.3) suggerisce che il numero di individui corrispondenti alla *schemata* S cresce, di generazione in generazione, al crescere del rapporto tra la media delle fitness degli individui corrispondenti alla *schemata* S e la fitness totale. Quindi se per una *schemata* S si ha che $val(S, t) > \bar{F}(t)$, gli individui di tale *schemata*, prolifereranno con successo nella generazione successiva, contrariamente agli individui corrispondenti alle *schemate* caratterizzate da valori medi della fitness al di sotto della fitness media relativa all’intera popolazione.

Dopo la selezione, deve essere considerato l'effetto del crossover. Indicata con m la lunghezza delle stringhe degli individui, la probabilità che un individuo, corrispondente alla generica *schemata* S , venga distrutto, se coinvolto nel crossover, è pari a:

$$\frac{\delta(S)}{(m-1)}. \quad (5.4)$$

Quindi la probabilità di sopravvivenza è data dalla:

$$p_{cs}(S) \geq 1 - p_c \frac{\delta(S)}{(m-1)}; \quad (5.5)$$

Dove p_c denota la probabilità di crossover. Il primo membro della (5.5) è maggiore uguale del secondo, poiché può accadere che uno schema venga conservato dopo il taglio e la ricombinazione dei cromosomi di due genitori, se entrambi contengono parti dello schema nelle giuste posizioni. Tenendo conto della selezione, il numero di individui della nuova generazione, corrispondenti alla *schemata* S , può essere stimato come:

$$\xi(S, t+1) \geq \xi(S, t) \cdot \frac{val(S, t)}{\bar{F}(t)} \left(1 - p_c \frac{\delta(S)}{(m-1)} \right). \quad (5.6)$$

Infine, detta p_m la probabilità di mutazione di un singolo bit, poiché le mutazioni sono indipendenti l'una dall'altra, la probabilità che ha una *schemata* di sopravvivere alla mutazione è espressa da:

$$p_{ms} = (1 - p_m)^{O(S)}; \quad (5.7)$$

Essendo $p_m \ll 1$, la (5.7) può essere approssimata come segue:

$$p_{ms} \approx 1 - p_m \cdot O(S). \quad (5.8)$$

La stima finale del numero di individui nella nuova generazione $\xi(S, t+1)$, corrispondenti ad una *schemata* S , si ottiene considerando contemporaneamente gli effetti della selezione, crossover e mutazione, ovvero:

$$\xi(S, t+1) \geq \xi(S, t) \cdot \frac{val(S, t)}{\bar{F}(t)} \left(1 - p_c \frac{\delta(S)}{(m-1)} - O(S) \cdot p_m \right). \quad (5.9)$$

A questo punto è possibile enunciare lo “*Schema Theorem*”:

“Se una *schemata* è caratterizzata dall'avere breve lunghezza $\delta(S)$, basso ordine $O(S)$ e fitness media $val(S, t)$ al di sopra della media delle fitness di tutta la popolazione $\bar{F}(t)$, allora essa incrementa esponenzialmente il numero di individui

corrispondenti a tali schemate, di generazione in generazione, nell'ambito di un GA classico. Inoltre risulta valida la disuguaglianza ().

L'ipotesi alla base del teorema appena enunciato, è detta *Building Block Hypothesis*. Tali *Building Block* sono, appunto, “*schemate*” caratterizzate da brevi lunghezze, basso ordine e fitness superiore alla media della popolazione. L'ipotesi dei *building block* e quindi lo “*Schema Theorem*”, rappresentano gli unici formalismi matematici in grado di spiegare la convergenza dei GA. L'ipotesi dei *Building Blocks*, però, non è sempre rispettata da GA diversi da quelli classici proposti da *Holland* o *Goldberg*. Ancora oggi, non esiste una teoria matematica completa, in grado di spiegare il comportamento dei GA, quindi, per tale motivo i essi sono tutt'oggi soggetti a forti critiche da parte di molti ricercatori. Ma nonostante ciò, anche i GA che non rispettano le ipotesi sopra menzionate, si sono rivelati capaci di ottenere soluzioni ottimali, e vengono ad essere impiegati con successo, da un numero sempre crescente di ricercatori, non solo per problemi di ottimizzazione riguardanti vari campi di applicazione, ma anche per l'apprendimento macchina e quindi lo sviluppo dell'intelligenza artificiale.

5.15 L'ALGORITMO PROPOSTO

L'algoritmo utilizzato, nel presente lavoro, può essere sintetizzato nei seguenti punti:

1. Generazione casuale di una popolazione iniziale;
 - I. Simulatore Idrologico/Idraulico;
 - II. Calcolo Fitness;
 - III. Operatore “Elitismo” se l'iterazione è diversa dalla prima;
 - IV. Operatore “crossover”;
 - V. Operatore “Mutazione”
 - VI. Operatore “Selezione”;
 - VII. Termine della procedura, se il numero di interazioni è uguale a quello prefissato, altrimenti si ripete da I.
2. Scrittura delle caratteristiche dell'individuo migliore.

In particolare, come operatore crossover, è stato utilizzato lo “*Uniform Crossover*”, con probabilità di crossover pari a 1. Per la selezione, è stato fatto uso della “*Ranking*”, con legge esponenziale (“*Exponential Ranking*”). Per quanto riguarda la probabilità di mutazione, i valori che sono stati utilizzati, nelle varie applicazioni, variano nel

“*range*” [0.01-0.04]. Per la generazione casuale dei numeri, frequentemente utilizzata all’interno dell’algoritmo, è stata utilizzata una tecnica di tipo *Lerner*. Un algoritmo del tipo descritto sopra, viene denominato “*Elitist Genetic Algorithm*” (EGA).

6 TEST ED APPLICAZIONI.

Il presente capitolo contiene tutti i test riguardanti i modelli utilizzati e presi in considerazione e, negli ultimi paragrafi, le applicazioni effettuate ai vari casi di studio. I paragrafi che vanno dal 6.1 al 6.5, riguardano i test di moto vario effettuati sul Modello Parabolico (CPM), sviluppato nell'ambito della tesi riguardo a modelli di moto vario completi (Hec-Ras). Nei suddetti capitoli si è mostrato, come il modello CPM sia in grado di fornire risultati molto vicini a quelli ottenibili con un modello completo, giustificando il suo utilizzo all'interno della procedura di ottimizzazione. I paragrafi compresi tra il 6.6 e il 6.7 contengono i test effettuati per l'algoritmo di ottimizzazione su dei casi di studio presenti in letteratura tecnica, nei quali si è mostrato l'efficacia dell'algoritmo genetico proposto. Negli ultimi capitoli vengono mostrate le applicazioni effettuate nel presente lavoro, presentando di volta in volta i casi di studio presi in esame.

6.1 TEST 1 LPM: MOTO VARIO SUL SINGOLO CANALE A DEBOLE PENDENZA (RAFFRONTO CON UN MODELLO COMPLETO E CON DATI SPERIMENTALI).

Il primo test effettuato riguarda un semplice caso di moto vario in alveo a debole pendenza.

Il canale in esame presenta una pendenza $i = 0.001$ ed una lunghezza $L = 10000m$. La sezione trasversale è a forma di trapezio semplice con inclinazione delle due sponde uguale pari a $\tan \alpha = 1$, dove α rappresenta l'angolo di inclinazione delle sponde rispetto alla verticale. La larghezza di base b della sezione è stata scelta pari a $5m$ e con un altezza massima della sezione $h_{max} = 5m$. Per la valutazione della cadente energetica si è fatto uso della nota formula di *Gauckler-Strickler*, prendendo il coefficiente di conducibilità idraulica $k_s = 50m^{-1/3}$. L'idrogramma di piena in ingresso nella sezione posta a monte del canale è di forma triangolare della durata complessiva di $7200s$, con un picco di $50m^3/s$ al tempo $t = 3600s$, mentre al tempo $t = 7200s$ viene ripristinata la portata iniziale di $1m^3/s$.

Nell'ultima sezione del canale è stata imposta, solo a titolo esemplificativo, una condizione di moto uniforme. Si è scelto di confrontare i risultati delle simulazioni nelle sezioni poste a $x = 2500m$ e $x = 5000m$ dalla sezione iniziale del canale. I risultati sono espressi in termini di quota di pelo libero dell'acqua e di portate. Per quanto riguarda i parametri della simulazione, si è fatto uso, per il calcolo, di un passo spaziale $\Delta x = 10m$, mentre il passo temporale $\Delta t = 5s$. Come si può facilmente vedere dai grafici seguenti, il modello CPM consente di ottenere risultati molto vicini a quelli di un modello completo.

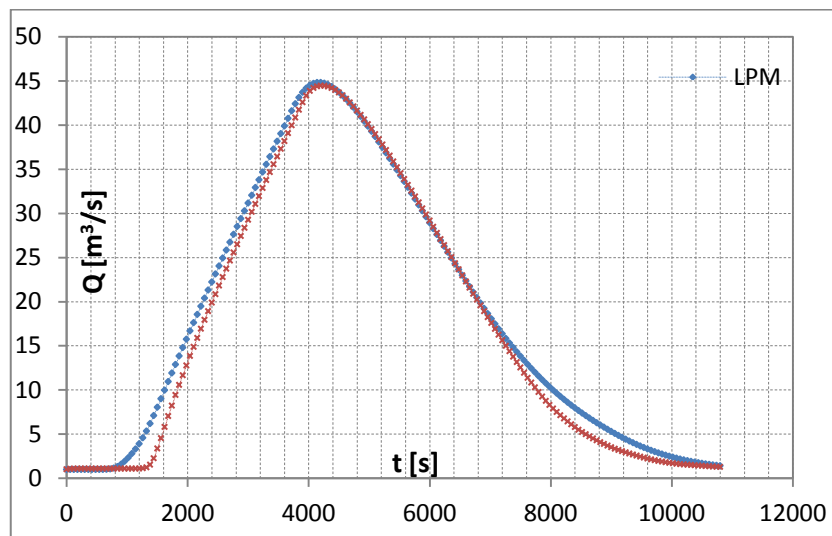


Fig.6.1 Confronti portate sez. $x=2500m$.

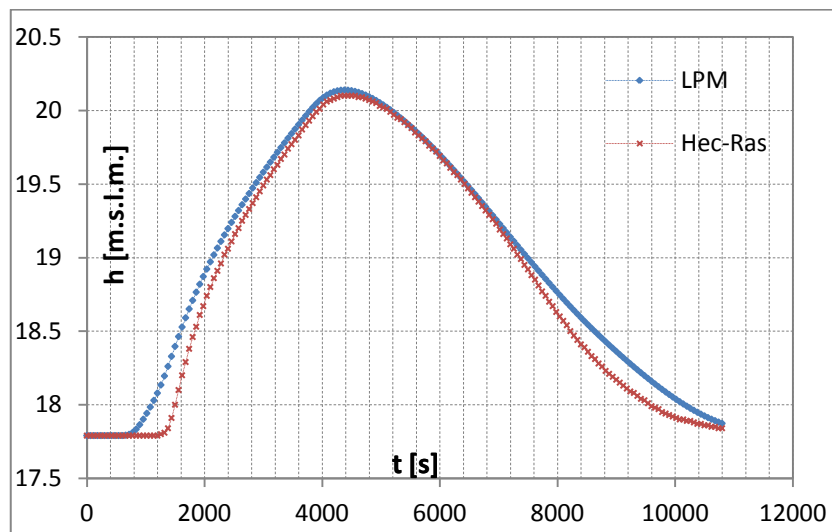


Fig.6.2 Confronti livelli idrici sez. $x=2500m$.

Nella tabella che segue sono riportati, rispettivamente, le portate al colmo di piena e i massimi tiranti istantanei ottenuti, nella sezione di ascissa $x = 2500m$.

X=2500m				
	$Q_{\max} [m^3/s]$	$h_{\max} [m]$	$T_Q [s]$	$T_h [s]$
CPM	44.83	2.64	4200	4380
HEC	44.47	2.60	4200	4380

Fig.6.3 Tiranti e portate massime ottenuti mediante i due modelli.

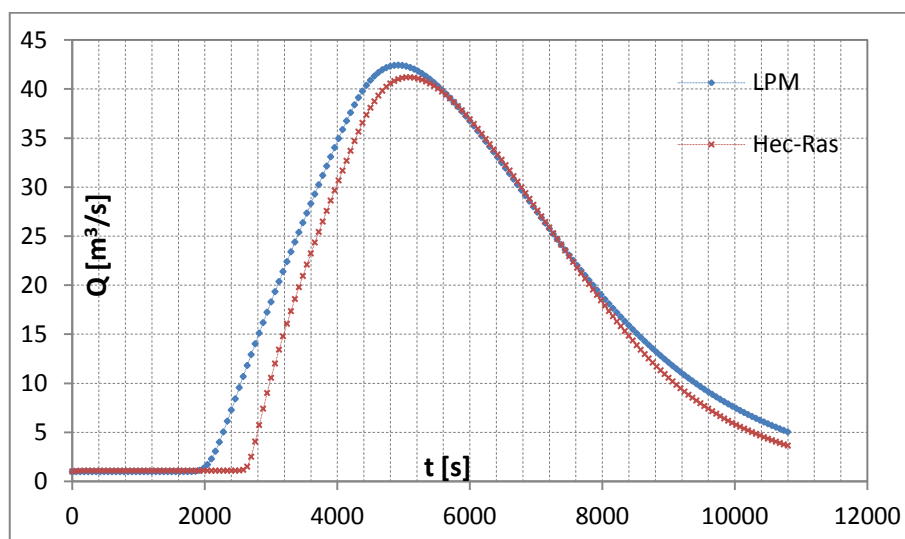


Fig.6.4 Confronti idrogrammi di piena sez. x=5000m .

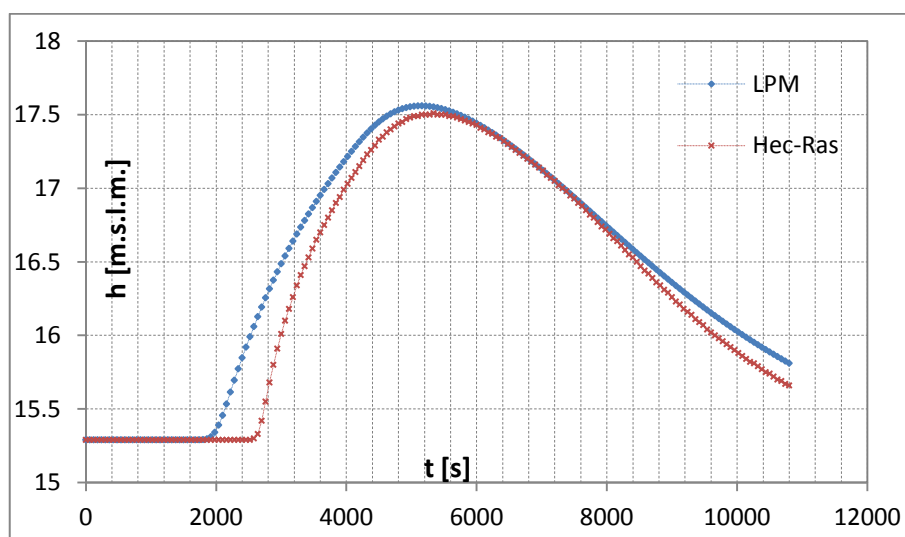


Fig.6.5 Confronti livelli idrici sez. x=5000m.

In maniera analoga a quanto fatto sopra, si riportano, nella tabella seguente, la portata al colmo di piena e il massimo tirante istantaneo, ottenuti con i due modelli per la sezione di ascissa $x = 5000m$, insieme ai corrispettivi istanti temporali espressi in secondi.

X=5000m				
	$Q_{max}[m^3/s]$	$h_{max}[m]$	$T_Q[s]$	$T_h[s]$
CPM	42.44	2.56	4920	5040
HEC	41.20	2.51	5040	5340

Fig.6.6 Tiranti e portate massime ottenuti mediante i due modelli.

E' stato possibile, inoltre, raffrontare i risultati forniti dal modello proposto, con misurazioni sperimentali effettuate su un canale di irrigazione reale. Tale canale è descritto in un report interno di "La Société du Canal de Provence". La sezione trasversale è a forma di trapezio, con base $b = 2.7m$, ed inclinazione dei lati obliqui $\alpha = \arctan(3/2)$. La pendenza longitudinale del canale è $i = 0.0002m/m$. A monte viene immesso un idrogramma nel quale la portata viene incrementata istantaneamente, a causa dell'improvvisa apertura di una paratoia, da $Q = 2.95m^3/s$ a $Q = 6.6m^3/s$, e mantenuta costante per tutta la durata dell'esperimento.

I grafici, di seguito riportati, mostrano i confronti tra i tiranti ottenuti con il modello CPM e le misurazioni sperimentali effettuate per le sezioni poste ad ascissa $x = 475m$ e $x = 1545m$.

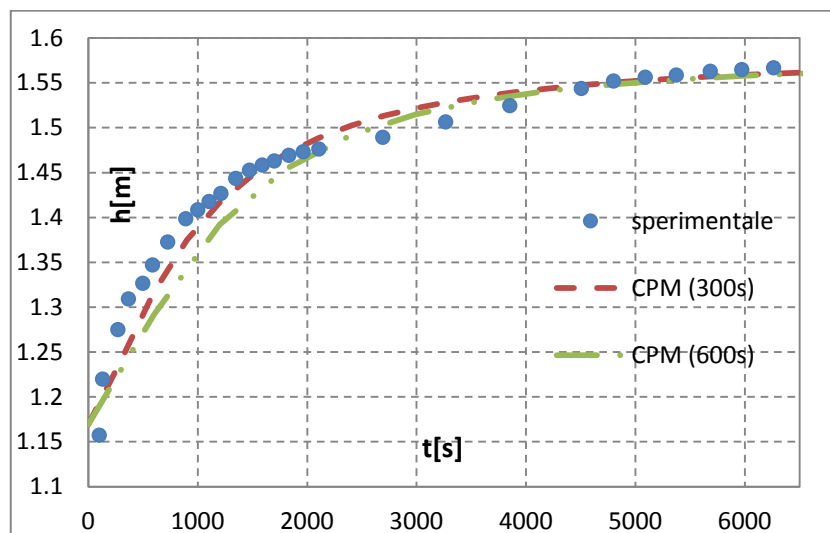


Fig.6.7 Confronti sui tiranti sez. x=475m.

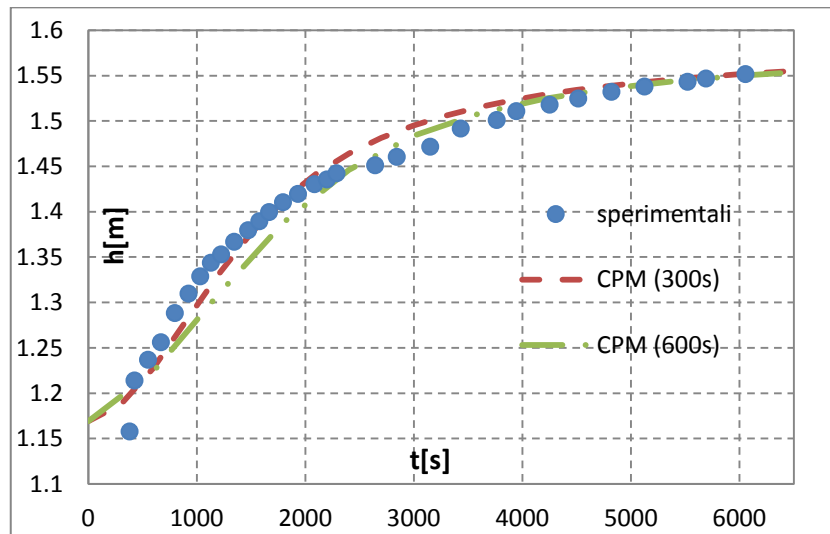


Fig.6.8 Confronti sui tiranti sez. x=1545m.

6.2 TEST 1 LPM: MOTO VARIO SU SINGOLO CANALE A PENDENZA VARIABILE (CAPACITA' DI PORTARE IN CONTO I RISALTI IDRAULICI).

Il presente test è stato eseguito allo scopo di mostrare l'efficacia del modello PAB, con le modifiche apportate al calcolo dei profili istantanei di moto stazionario, di portare in conto la presenza di uno o più risalti idraulici lungo il percorso. Il test è stato effettuato su di un canale a pendenza variabile, costituito da quattro tratti di lunghezza $L_i = 1000m$ ciascuno, per una lunghezza complessiva di $4000m$. La sezione trasversale del canale, uguale per tutti i tratti, è a forma di trapezio, con pendenza dei lati $\tan \alpha = 1$, larghezza di base $b = 5m$ e conducibilità idraulica $k_s = 50m^{-1/3}$. I quattro tratti presentano, rispettivamente, pendenze $i_1 = 0.001m/m$, $i_2 = 0.01m/m$, $i_3 = 0.03m/m$ ed $i_4 = 0.0001m/m$. Per quanto riguarda le condizioni al contorno nella sezione iniziale del canale viene immesso un idrogramma di forma triangolare, con portata iniziale $Q = 5m^3/s$, portata $Q = 30m^3/s$ al tempo $t = 3600s$ e portata $Q = 5m^3/s$ al tempo $t = 7200s$. A valle si è posta una condizione di stato critico.

Nel seguente grafico seguente, tracciato a diversi istanti temporali, mostra come il modello di propagazione proposto sia in grado di catturare non solo la presenza del risalto idraulico, ma anche il suo spostamento nel tempo. Sulle ordinate è stato riportato la quota di pelo libero espressa in metri sul livello del mare, mentre sulle

ascisse viene riportata la progressiva espressa in metri. Come si può notare, i vari profili sono stati tracciati nella zona in cui avviene la variazione di pendenza longitudinale più grande, ovvero tra il terzo ed il quarto tratto.

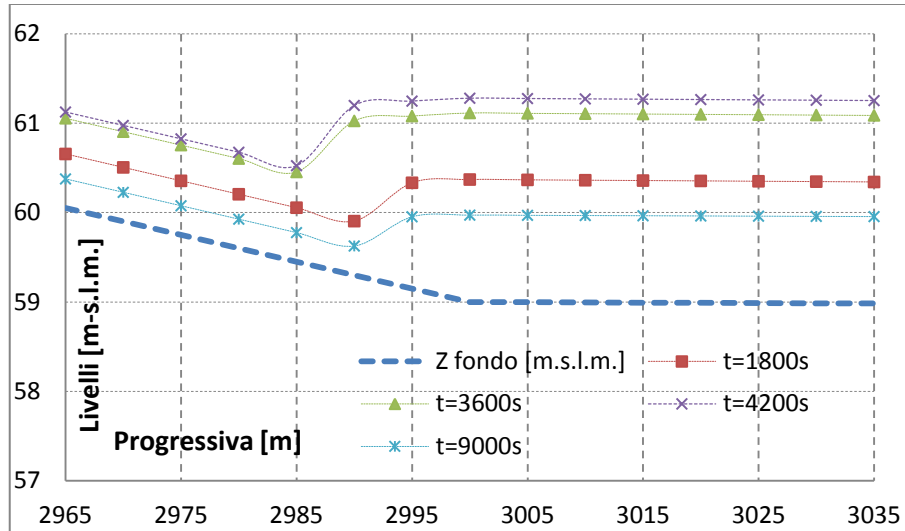


Fig.6.9 Posizione del risalto idraulico a vari istanti temporali.

I confronti, in termini di tiranti e portate, sono stati effettuati in corrispondenza della sezione terminale del terzo tratto, ovvero quella sezione corrispondente ad una ascissa progressiva $x = 3000m$, a cavallo tra il tratto a pendenza longitudinale $i_3 = 0.03m/m$ e quello di pendenza longitudinale $i_4 = 0.0001m/m$. I risultati sono riassunti mediante i grafici che seguono.

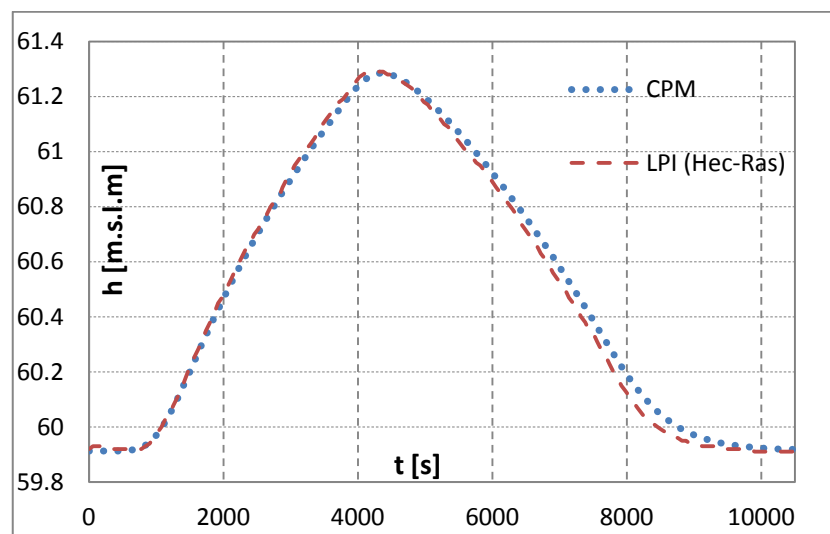


Fig.6.10 Confronti livelli idrici sez. $x=3000m$.

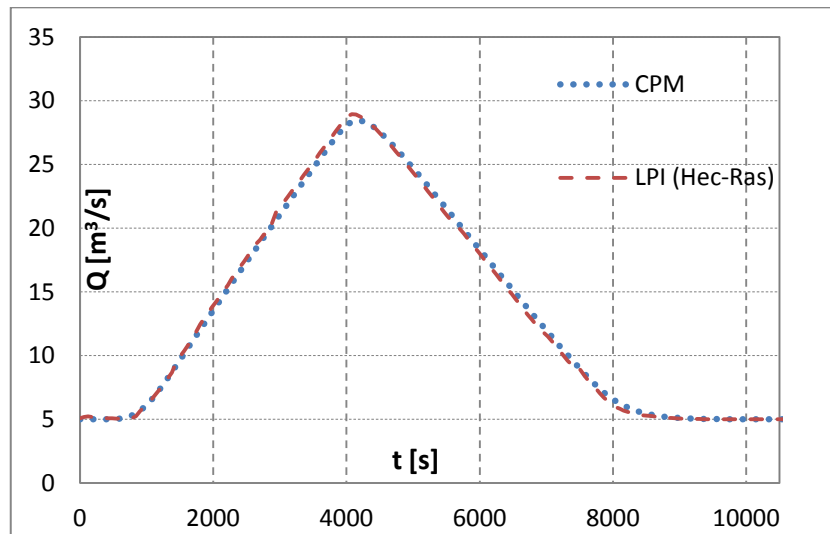


Fig.6.11 Confronti Idrogrammi di piena sez. x=3000m.

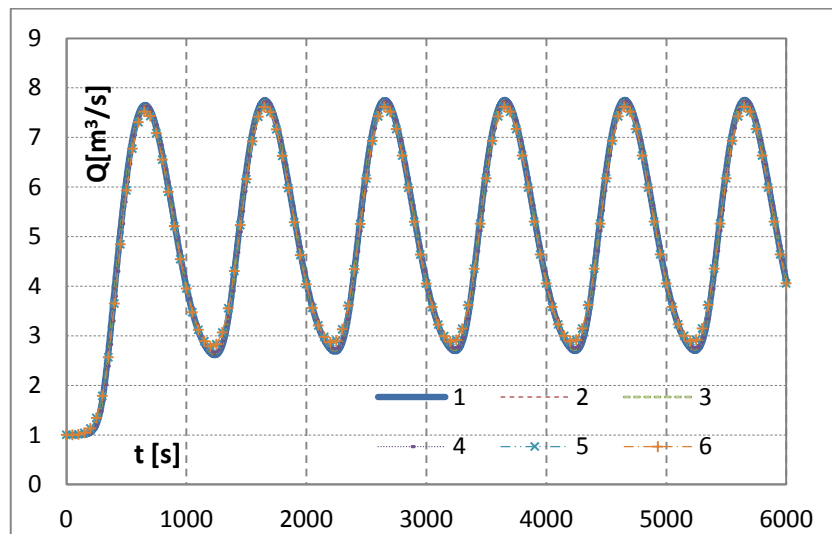
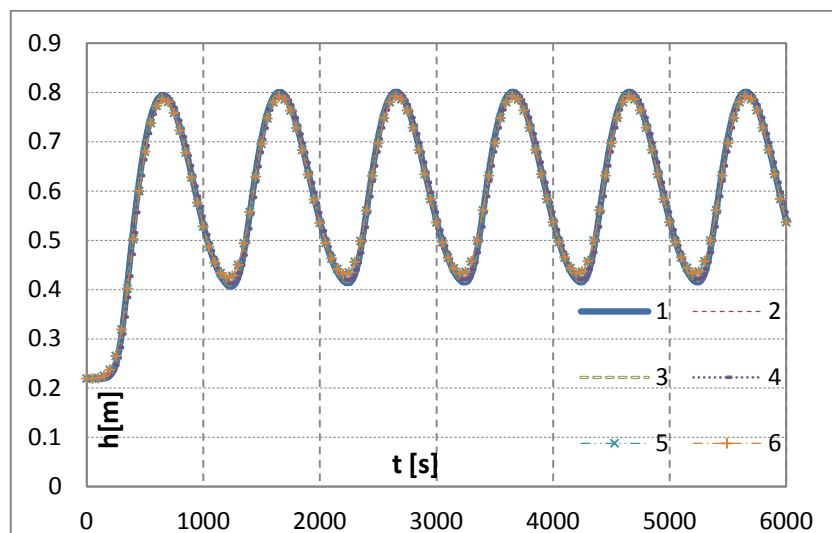
6.3 TEST 3 LPM: VERIFICA STABILITA' LPM.

Lo schema CPM, ricavato ed illustrato nei precedenti capitoli, dà luogo ad un metodo di calcolo incondizionatamente stabile per qualunque scelta del passo temporale e spaziale. Nel presente paragrafo vengono illustrati due test numerici effettuati allo scopo di mostrare la stabilità del modello per al variare degli intervalli di calcolo.

Il primo test numerico consiste in una simulazione di moto vario, su un canale a forma trapezia semplice, con i lati obliqui inclinati a 45° , larghezza della base pari a $3m$, pendenza longitudinale $i = 0.001m/m$, conducibilità idraulica $k_s = 50m^{-1/3}$ ed una lunghezza complessiva $L = 500m$. Nella sezione più a valle, viene imposta una condizione di stato critico, mentre nella sezione più a monte viene immesso un idrogramma di piena rappresentato da una legge del tipo $Q(t) = 5 - 4\sin(t \cdot \pi/500)$. La condizione iniziale è rappresentata da uno stato di moto permanente con portata pari a $1m^3/s$.

Il test è stato effettuato per sei diverse simulazioni nelle quali è stato fatto variare il passo spaziale e temporale come schematizzato nella seguente tabella.

Simulazione	Δt [s]	Δx [m]
1	2	2
2	5	5
3	10	5
4	20	10
5	50	10
6	100	20

Fig.6.12 Intervalli di calcolo.**Fig.6.13 Idrogrammi nella sezione terminale.****Fig.6.14 Tirantogrammi nella sezione terminale.**

I risultati ottenuti sono sintetizzati nei grafici di Fig. 6.13 e Fig.6.14. Da essi è possibile mettere in evidenza la capacità del modello CPM, non solo di mantenere stabile la

soluzione, ma anche quella di mantenere un certo grado di accuratezza all'aumentare degli intervalli di calcolo. Infatti tra la simulazione 1, teoricamente tendente alla soluzione analitica, e la simulazione 6, con passi temporali e spaziali, rispettivamente, cinquanta e dieci volte più grandi della simulazione 1, il massimo errore percentual sulle portate al picco è pari al 1,79%, mentre in termini dei massimi tiranti istantanei è pari a circa 1,1%.

Un secondo test è stato effettuato per enfatizzare la stabilità incondizionata e la capacità contenere gli errori del modello proposto, per intervalli di calcolo, spaziali e temporali, molto ampi. Il test è stato eseguito su di un canale con sezione trasversale identica a quella del test precedente, ma con lunghezza complessiva $L = 5000$. A valle è stata imposta una condizione di stato critico, mentre a monte è stato immesso un idrogramma di forma triangolare, con portata crescente linearmente da $1m^3/s$ a $10m^3/s$ dal tempo $t = 0s$ tempo $t = 2000s$ e decrescente linearmente da $10m^3/s$ a $1m^3/s$ dal tempo $t = 2000s$ al tempo $t = 4000s$. La condizione iniziale è rappresentata da uno stato di moto permanente con portata $Q = 1m^3/s$. I passi spaziali e temporali utilizzati nelle varie simulazioni sono riassunti nella tabella sotto riportata.

simulazione	$\Delta t[s]$	$\Delta x[m]$
1	50	50
2	100	100
3	200	200
4	500	500

Fig.6.15 Intervalli di calcolo.

Nei seguenti grafici, vengono mostrati gli andamenti temporali della portata e del tirante per la sezione posta ad una distanza di $3000m$ dall'inizio del canale. Tali grafici mostrano come il modello si mantenga stabile anche per intervalli spaziali e temporali molto ampi. Inoltre è possibile notare come la perdita di accuratezza inizia ad essere abbastanza evidente quando il passo temporale inizia ad essere molto grande. Tuttavia l'errore, espresso in percentuale, risulta essere al massimo dell' 8,4% sulle portate, mentre risulta essere del 4,8% sui tiranti.

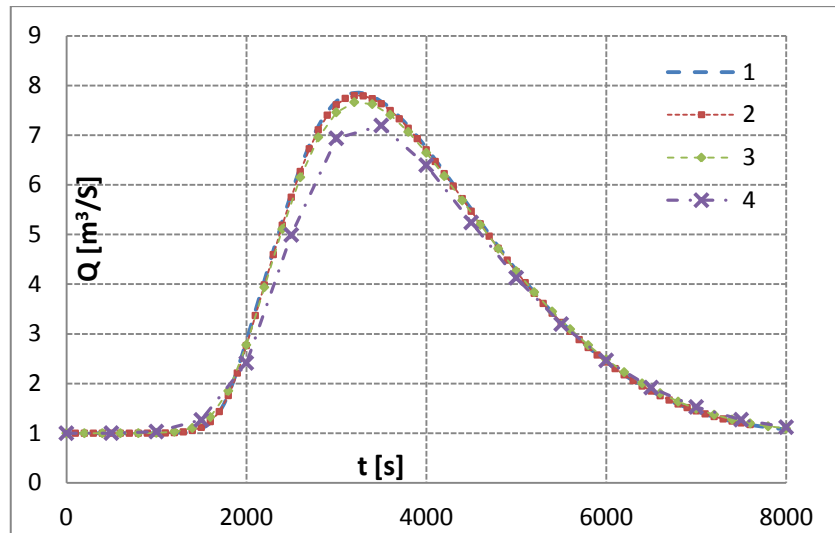


Fig.6.16 Idrogrammi sez. $x=3000\text{m}$ ottenuti con le varie simulazioni.

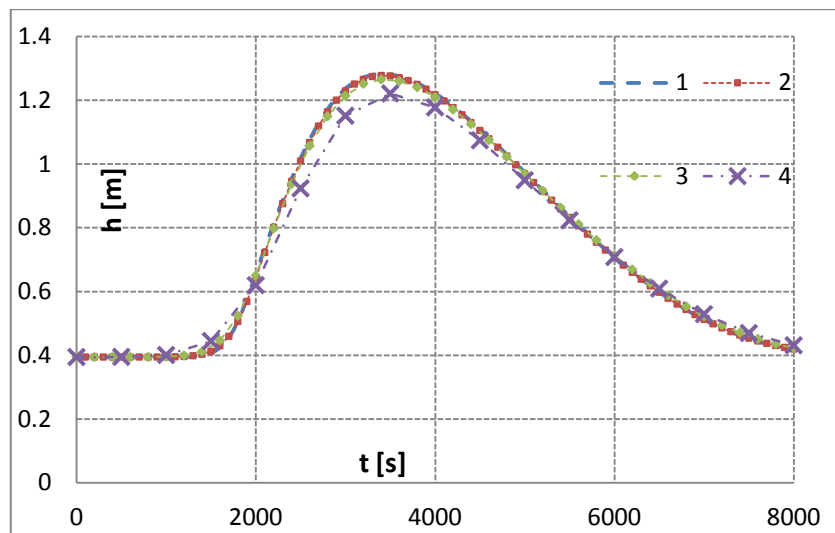


Fig.6.17 Tirantogrammi sez. $x=3000\text{m}$ ottenuti con le varie simulazioni.

6.4 TEST 4 LPM: SIMULAZIONE CORRENTI IN PRESSIONE (CORRENTI STAZIONARIE)

Dai test effettuati nei precedenti paragrafi, è stato possibile mettere in risalto l'efficacia del modello proposto, nella simulazione del moto vario nelle correnti a pelo libero, anche in regimi misti di corrente (veloce/lenta e viceversa). Il test descritto nel presente paragrafo, ha lo scopo di mostrare, come il modello CPM, con il semplice utilizzo della *Preissmann Slot*, sia in grado di descrivere anche situazioni in cui si verifichi il passaggio da correnti a pelo libero a correnti in pressione. Tale aspetto del modello proposto, è molto importante in quanto, nel presente lavoro di tesi, viene proposta una procedura di ottimizzazione per reti di drenaggio di qualunque natura (reti di fognatura o di bonifica). In particolare nel caso delle reti di fognatura, deve essere preso in considerazione il fatto che, nelle varie iterazioni dell'algoritmo di ottimizzazione, possano essere generati spechi con dimensioni tali da non garantire il deflusso a pelo libero della corrente e questo fatto può dar luogo ad instabilità numeriche.

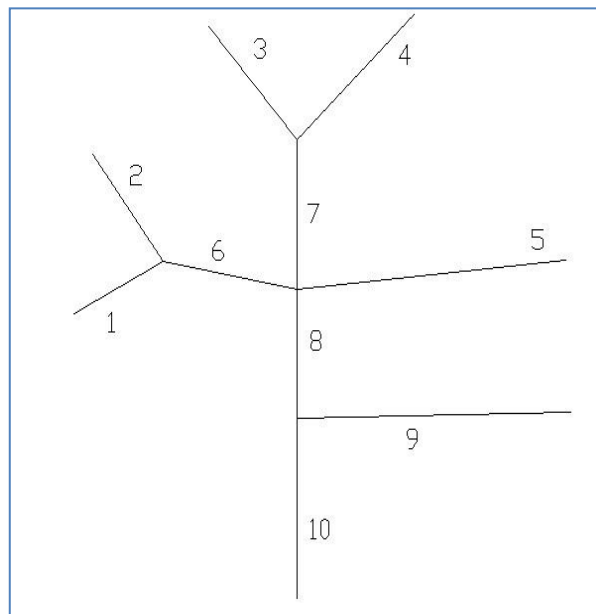


Fig.6.18 Disposizione geometrica della rete.

Il test è stato effettuato considerando una rete costituita da 10 canali, le cui caratteristiche geometriche dei rami e delle sezioni sono riassunte nella tabella di Fig. 6.19, mentre la disposizione in pianta è schematizzata in Fig.6.18.

Va precisato, però, che il presente test è stato effettuato con riferimento a condizioni di moto vario tendente in maniera asintotica ad un moto permanente. Infatti, gli

idrogrammi in ingresso alle sezioni più a monte dei tratti iniziali della rete, dopo un breve transitorio, mantengono costanti le portate per un tempo molto lungo, in maniera tale da instaurare un regime di moto permanente all'interno della rete. Gli idrogrammi in ingresso sono sintetizzati nella tabella di Fig.6.20. A valle è stata imposta una condizione tale da avere tirante di stato critico quando la portata è tale da avere un deflusso a pelo libero, in caso contrario il tirante viene posto pari al diametro della condotta (come se vi fosse un getto a pressione atmosferica). Va precisato inoltre, che, a titolo puramente esemplificativo, i vari condotti sono stati allineati verticalmente rispetto al fondo fogna, e non rispetto al cielo fogna.

Ramo	L[m]	Z_{mon} [m]	Z_{val} [m]	D[m]	$K_s[\text{m}^{-1/3}]$
1	200	20	19.8	0.3	90
2	200	20	19.8	0.3	90
3	200	20	19.8	0.3	90
4	200	20	19.8	0.3	90
5	500	20	19.5	0.6	90
6	300	19.8	19.5	2	90
7	300	19.8	19.5	1	90
8	300	19.5	19.2	0.5	90
9	300	19.5	19.2	0.8	90
10	200	19.2	19	0.4	90

Fig.6.19 Caratteristiche dei singoli tratti della rete.

Tratto	1	2	3	4	5	9
t[s]	$Q[\text{m}^3/\text{s}]$	$Q[\text{m}^3/\text{s}]$	$Q[\text{m}^3/\text{s}]$	$Q[\text{m}^3/\text{s}]$	$Q[\text{m}^3/\text{s}]$	$Q[\text{m}^3/\text{s}]$
0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
500	0.08	0.08	0.025	0.025	0.02	0.02
1000000	0.08	0.08	0.025	0.025	0.02	0.02

Fig.6.20 Idrogrammi in ingresso.

Le figure 6.21 e 6.22 mostrano l'andamento delle linee dell'energia nei percorsi costituiti dai tratti 1-6-8-10 e 3-7-8-10.

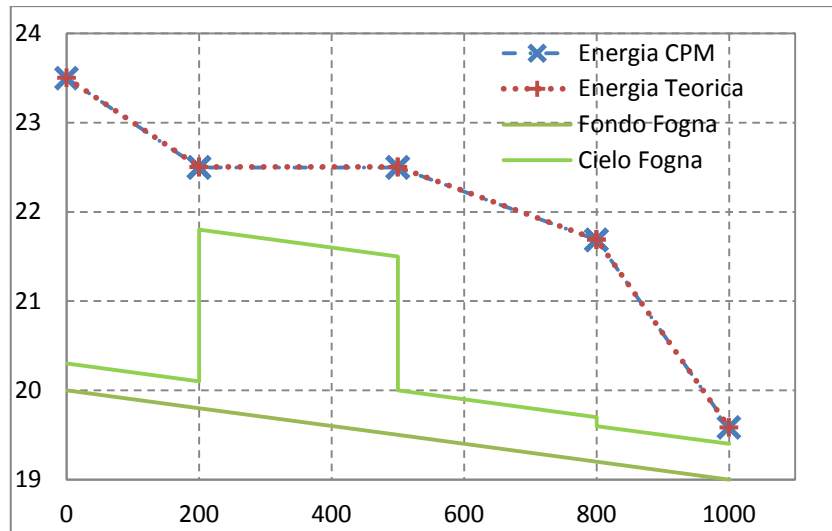


Fig.6.21 Andamento dell'energia percorso 1-6-8-10.

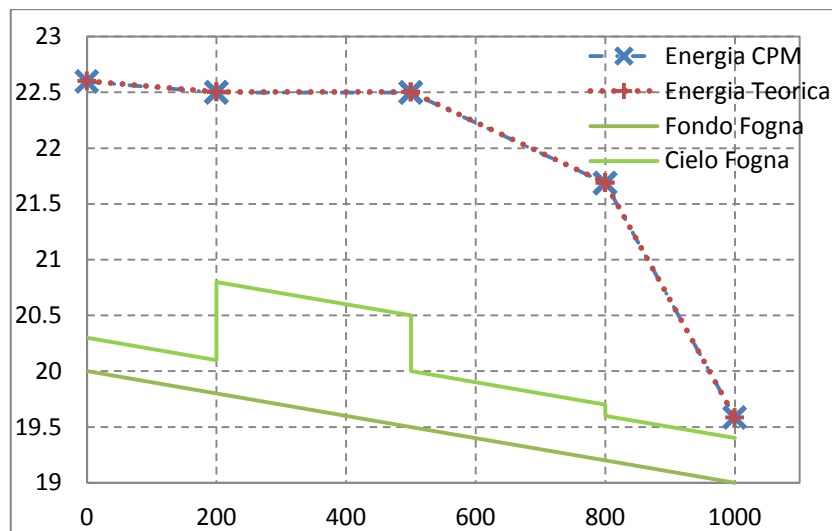


Fig.6.22 Andamento dell'energia percorso 3-7-8-10.

Nei grafici sopra riportati, l'andamento dell'energia è stato confrontato con quello che si otterrebbe in moto permanente, con le stesse portate, utilizzando la formula di *Darcy* per valutare le perdite distribuite di energia lungo il percorso.

6.5 TEST 5 CPM: CAPACITA' DI SIMULARE LA TRANSIZIONE DA CORRENTE A SUPERFICIE LIBERA A CORRENTE IN PRESSIONE ALL'INTERNO DEL PROCESSO DI MOTO VARIO

Nel presente capitolo viene illustrato un ulteriore test sulla capacità, del modello proposto, di simulare il passaggio da corrente a superficie libera a corrente in pressione. Il test è stato effettuato con riferimento ad una rete costituita da una successione di tre tratti, le cui caratteristiche, in termini di pendenze, lunghezze e caratteristiche delle sezioni trasversali, sono sintetizzate nella tabella di figura 6.23. Le condizioni al contorno sono rappresentate a monte da un idrogramma di forma triangolare, con portata che varia da $0,01\text{m}^3/\text{s}$, nell'istante iniziale, a $2\text{m}^3/\text{s}$, nell'istante $t = 3600\text{s}$, per poi tornare ad un valore di $0,01\text{m}^3/\text{s}$ nell'istante $t = 7200\text{s}$. A valle è stata imposta una condizione di stato critico, mentre le condizioni iniziali sono rappresentate da uno stato di moto permanente con portata pari a $0,01\text{m}^3/\text{s}$. I risultati sono stati paragonati a quelli ottenuti con il programma Hec-Ras, in quanto anche esso fa uso della "Preissmann Slot" per simulare il moto in pressione.

Ramo	L[m]	Z_{mon} [m]	Z_{val} [m]	D[m]	$K_s[\text{m}^{-1/3}]$
1	500	100	80	1	80
2	500	80	79.5	1	80
3	500	79.5	64.5	1	80

Fig.6.23 Caratteristiche dei singoli tratti della rete.

Nelle Fig.6.24 e Fig.6.25 sono riportati gli andamenti della quota di pelo libero e della portata, nella sezione di ascissa $x = 250\text{m}$ del secondo canale.

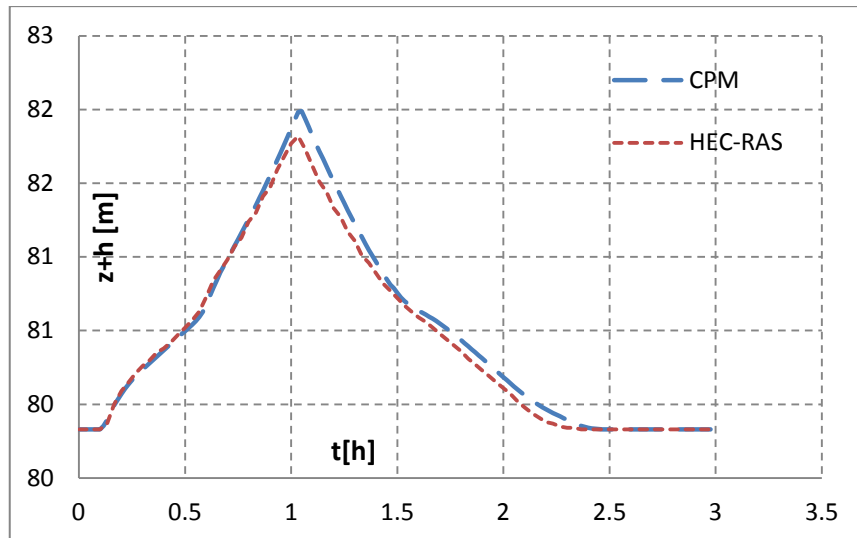


Fig.6.24 Confronti livelli idrici ($z+h$) sez. $x=250\text{m}$ tratto 2.

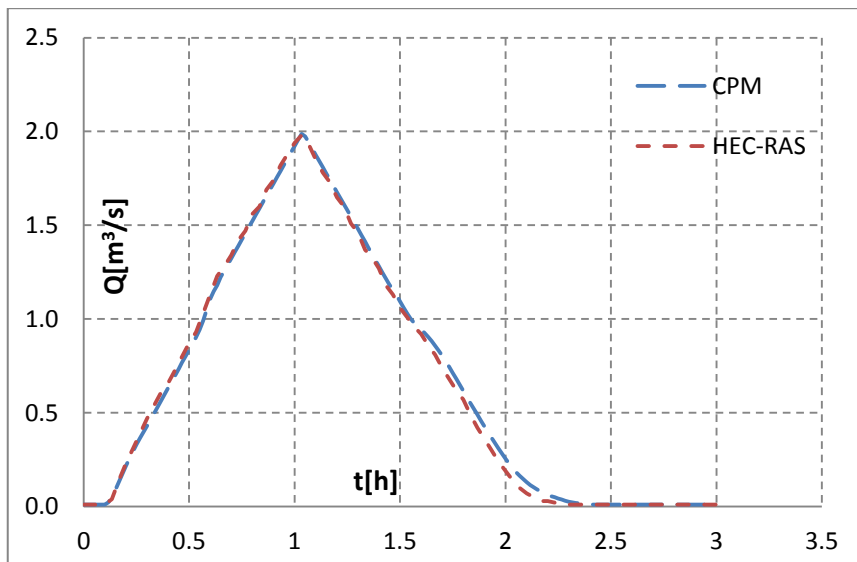


Fig.6.25 Confronti portate sez. $x=250\text{m}$ tratto 2.

6.6 TEST 1 EGA: RETE MAYS & YEN (1975).

Una volta verificata la validità del modello di propagazione, si è proceduto con la verifica dell'algoritmo di ottimizzazione proposto. Al fine di stabilire l'efficacia dell'algoritmo genetico, implementato in un opportuno codice di calcolo, sono stati effettuati una serie di test, su alcune reti presenti in letteratura tecnica. Nel seguito l'algoritmo di ottimizzazione, utilizzato nel presente lavoro, verrà indicato con la sigla EGA (Elitist Genetic Algorithm), in quanto, rispetto agli algoritmi genetici più tradizionali (Goldberg 1989), è stato fatto uso dell'operatore "Elitismo". Il caso preso in esame nel presente test, è costituito da una rete presentata per la prima volta da *Mays & Yen* (1975), il cui grafo è riportato nella figura 6.26, mentre le quote dei nodi, la lunghezza dei tratti (link) e le portate di progetto, sono riportate nella tabella di figura 6.27.

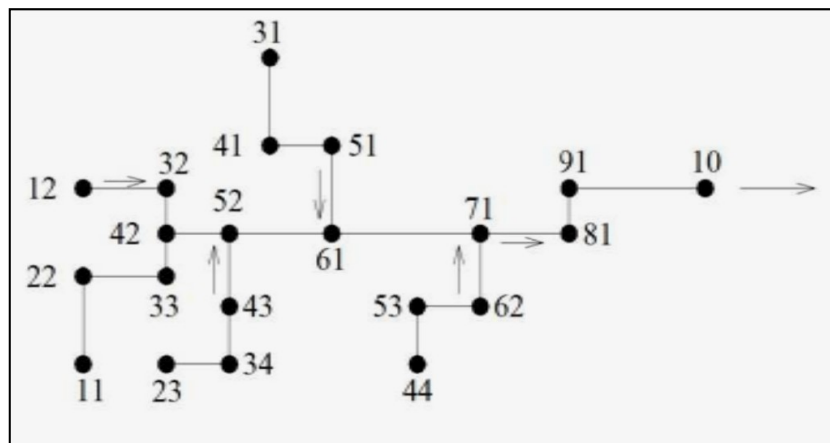


Fig.6.26 Layout rete Mays & Yen (1975).

Per la quota di scavo del nodo finale della rete, è stato preso in considerazione un insieme di 32 quote, variabili nell'intervallo $[2.7432, 4.2672]$ m (lunghezza dell'intervallo corrispondente a $[9, 14]$ piedi). In questo modo, seguendo le analisi realizzate da vari autori (Mays e Yen 1975, Mays e Wenzel 1976, Robinson e Labadie 1981, Miles e Heaney 1988, Afshar et al. 2006, Afshar 2006, Afshar 2007, Afshar 2010), è stato possibile prendere in considerazione le seguenti variabili decisionali:

- Un insieme di $2^5 = 32$ quote di scavo del nodo terminale della rete, variabili nell'intervallo $[2.7432, 4.2672]$ m;

- $2^9 = 512$ pendenze longitudinali, variabili nell'intervallo $[0.004, 0.03]$ m/m, con passo pari a $5,0880626 \times 10^{-5}$ m / m.
- Un insieme di $2^3 = 8$ diametri, caratterizzati dai seguenti valori: 0,3048 m; m 0,3810, 0,4572 m; 0,5334 m; 0,7620 m; 0,9144 m; 1,0668 m; e 1,2192 m.

Per ciò che concerne l'espressione della funzione di “*fitness*” utilizzata, si è fatto riferimento alle espressioni fornite dagli autori *Mays & Wenzel* (1976), per quel che riguarda il costo della rete, mentre per la funzione di penalità (che rappresenta un costo sociale indicativo del rispetto dei vincoli), si è fatto uso, sostanzialmente, dell'espressione fornita in 5.9, della quale, non sono state considerate le penalità relative alla massima quota di scavo e alla velocità media nera, poiché l'ottimizzazione è stata effettuata, dai vari autori, con riferimento a portate di picco. Inoltre per i vincoli relativi alla velocità massima, alla velocità di auto pulitura e al minimo ricoprimento, si è fatto uso dei limiti utilizzati dagli autori *Miles and Heaney* 1988, *Afshar et al.* (2006 e 2010).

Link	Z _{terreno monte} [m]	Z _{terreno valle} [m]	Lungh. [m]	Q [m ³ /s]
1122	152.4	150.876	106.68	0.1132
2233	150.876	148.4876	121.92	0.1982
3342	148.4876	146.304	106.68	0.2548
1232	149.352	147.828	121.92	0.1132
3242	147.828	146.304	121.0761	0.2265
4252	146.304	143.256	167.6796	0.6229
2334	149.352	147.828	147.6375	0.2265
3443	147.828	144.78	137.16	0.3398
4552	144.78	143.256	106.68	0.453
5261	143.256	141.732	152.4	1.2459
3141	147.828	144.78	152.4	0.2548
4151	144.78	143.256	106.68	0.453
5161	143.256	141.732	106.68	0.5663
6171	141.732	138.648	172.212	2.0104
4453	142.6464	141.4272	121.92	0.1132
5362	141.4272	140.208	91.44	0.1699
6271	140.208	138.648	105.2291	0.2548
7181	138.648	137.4648	121.92	2.4635
8191	137.4648	136.5504	152.4	2.5201
9110	136.5504	135.636	186.5376	2.6617

Fig.6.27 Caratteristiche dei singoli tratti (Mays 1975).

Al fine di stabilire il miglior valore della probabilità di mutazione p_m , sono state eseguite varie analisi, in particolare sono stati utilizzati i valori $p_m = 0.015$, $p_m = 0.025$ e $p_m = 0.03$. La migliore soluzione, è stata ottenuta utilizzando il valore $p_m = 0.015$. Come è possibile vedere nella tabella di fig.6.28, la soluzione ottenuta mediante l'algoritmo proposto, presenta un costo più basso rispetto a quelli ottenuti in letteratura tecnica dai vari autori che hanno utilizzato il presente caso di studio.

<i>Modelo</i>	<i>Costo (\$)</i>
Mays and Yen (1975)	265684
Mays and Wenzel (1976)	264197
Robinson and Labadie (1981)	274463
Miles and Heaney (1988)	245874
Afshar <i>et al.</i> (2006)	244747
Afshar (2006)	241496
Afshar (2007)	242539
Afshar (2010)	242119
Algoritmo proposto	235988

Fig.6.28 Confronto con i risultati estratti dalla letteratura.

È necessario precisare che nei lavori di *Mays and Yen* (1975) e *Mays and Wenzel* (1976), sono stati utilizzati valori più restrittivi, anche se di poco, per esprimere il vincolo relativo alla velocità massima. A rigore, quindi, il confronto non dovrebbe essere fatto con i costi ottenuti da suddetti autori, ma si è scelto di riportarli ugualmente per motivi storici. Va però detto che, il valore della velocità limite utilizzato dagli autori sopramenzionati, non è tale da poter giustificare una tale differenza di costo.

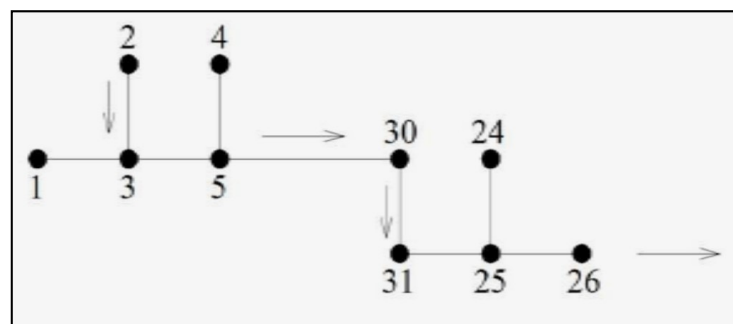
Nella tabella mostrata in figura 6.29, sono stati riportati i valori della quota di scavo di monte $Z_{monte} [m]$, di valle $Z_{valle} [m]$, del diametro della sezione circolare $D [mm]$, della pendenza longitudinale $i [m/m]$, della velocità massima $V [m/s]$ e del grado di riempimento $h/D [m/m]$, ottenuti per ogni ramo della soluzione ottima, ricavata con l'algoritmo proposto. In particolare, i valori ottenuti per i diametri, mediante l'impiego dell'algoritmo proposto, risultano essere, mediamente, i più piccoli rispetto a quelli estratti dai lavori reperibili in letteratura tecnica, riguardanti lo stesso caso di studio.

Ramo	Z_{monte} [m]	Z_{valle} [m]	D [mm]	i [m/m]	V [m/s]	h/D [m/m]
11-22	149.951	148.406	304.8	0.01448	1.962	0.738
22-33	148.406	146.045	304.8	0.01937	3.436	0.738
33-42	146.045	143.11	381	0.02751	2.981	0.702
12-32	146.824	145.375	304.8	0.01189	1.962	0.738
32-42	145.375	143.11	381	0.01728	2.398	0.772
42-52	143.11	140.742	533.4	0.01413	3.077	0.85
23-34	146.836	145.389	381	0.0095	2.345	0.79
34-43	145.389	141.924	381	0.02527	3.517	0.79
43-52	141.924	140.742	457.2	0.01107	3.127	0.825
52-61	140.742	138.248	762	0.01636	3.649	0.701
31-41	145.326	142.304	381	0.01982	2.637	0.79
41-51	142.304	140.814	457.2	0.01397	3.127	0.825
51-61	140.814	138.248	533.4	0.02405	3.469	0.685
61-71	138.248	136.158	914.4	0.01143	3.505	0.816
44-53	140.143	138.973	304.8	0.0096	1.962	0.738
53-62	138.973	137.747	304.8	0.01341	2.945	0.738
62-71	137.747	136.158	381	0.01489	2.637	0.79
71-81	136.158	135.026	1066.8	0.00929	3.475	0.74
81-91	135.026	134.09	1066.8	0.00614	2.974	0.9
91-10	134.09	132.903	1066.8	0.00649	3.141	0.9

Fig.6.29 Confronto con i risultati estratti dalla letteratura.

6.7 TEST 2 GA: WORLD BANK SEWER (1991)

Il secondo test è stato fatto considerando la rete fognaria di tipo misto, con tubi circolari, proposta da World Bank (1991) e analizzata anche da Afshar (2006).

**Fig.6.30 Layout rete World Bank (1991).**

In figura 6.30 viene mostrato il layout della rete, mentre le sue caratteristiche sono riassunte nella Tabella 6.31, in termini di portate di progetto Q_d , lunghezza L dei tratti,

quote del terreno a monte Z_{monte} e a valle Z_{valle} . Le portate di progetto, che vengono assegnate come dati del problema, coincidono con le portate di picco. Per ogni tratto vengono assunte le condizioni di moto uniforme e, per il calcolo idraulico della rete, si è fatto uso della formula di *Manning* con coefficiente $n = 0.014$.

Tratto	$Z_{monte}[m]$	$Z_{valle}[m]$	$L[m]$	Q_d [m ³ /s]
1-3	1396.1	1388.6	104	0.0162
2-3	1395.4	1388.6	240	0.0662
3-5	1388.6	1381.9	225	0.1244
4-5	1387	1381.9	196	0.1189
5-30	1381.9	1380	110	0.302
30-31	1380	1379	46	0.302
31-25	1379	1377.5	180	0.302
24-25	1378.4	1377.5	28	0.035
25-26	1377.5	1372.5	220	0.355

Fig.6.32 Caratteristiche della rete World Bank (1991).

sezione	D [m]	costo
1	0.15	50
2	0.2	70
3	0.25	90
4	0.3	120
5	0.35	150
6	0.4	165
7	0.45	200
8	0.5	230
9	0.55	250
10	0.6	300
11	0.8	350
12	1	400

Fig.6.33 Riepilogo diametri D[m] e relative unità di costo.

Allo scopo di minimizzare la funzione di costo, i vincoli, in termini di grado di riempimento, massimo ricoprimento, profondità massima di scavo, velocità limite massima e velocità di auto-pulitura, sono stati imposti seguendo quanto fatto da *Afshar* (2006). La quota di scavo della sezione finale della rete è stata fissata pari a 2m. Per le pendenze longitudinali si è fatto uso di un insieme di $2^9 = 512$ pendenze, variabili

all'interno dell'intervallo $[0.01, 0.08] \text{ m/m}$. I diametri utilizzati sono riepilogati, insieme ai rispettivi costi, nella tabella che segue.

Per ciò che riguarda i costi di scavo, si è fatto riferimento a World Bank (1991) ed Afshar (2002, 2006). Il costo della soluzione ottimale, ottenuto con l'algoritmo proposto, insieme ai costi delle soluzioni ottenute dai vari autori, sono riportati nella tabella di fig.6.34.

<i>Modello</i>	<i>Costo (unità)</i>
SEWER (World Bank 1991)	199480
Afshar and Zamani (2002)	199320
Afshar <i>et al.</i> (GA-TRANS2, 2006)	199244
EGA proposto	199089

Fig.6.34 Costo riepilogo costi ottenuti dal modello proposto e dai vari autori.

ramo	$Z_m[m]$	$Z_v[m]$	$D[mm]$	$i[m/m]$	$V[m/s]$	$h/D[m/m]$
1-3	1394.599	1387.0911	150	0.0721918	2.063	0.456
2-3	1393.8966	1387.0911	250	0.0283562	2.057	0.624
3-5	1387.0911	1380.1562	300	0.0308219	2.471	0.67
4-5	1385.4992	1380.1562	300	0.0272603	2.331	0.678
5-30	1380.1562	1378.3178	450	0.0167123	2.429	0.73
30-31	1378.3178	1377.4986	450	0.0178082	2.496	0.711
31-25	1377.4986	1374.4658	450	0.0168493	2.437	0.727
24-25	1376.6022	1374.4658	150	0.0763014	2.497	0.74
25-26	1374.4658	1371	500	0.0157534	2.494	0.681

Fig.6.35 Caratteristiche della rete ottimale.

6.8 CASO DI STUDIO PER LE RETI DI BONIFICA

La procedura sviluppata, per l'ottimizzazione delle reti di drenaggio, è stata applicata ad un caso di studio presentato in letteratura tecnica da *Covelli et al.* (2008). Tale caso di studio riguarda una rete di bonifica, costituita da 17 collettori con sezione trasversale a forma di trapezio, drenante da un'area complessiva di 295.4ha, il cui layout è riportato in fig.6.36. Le caratteristiche geometriche della rete sono riportate, ramo per ramo, nella tabella di fig.6.37 (in termini di Lunghezza $L[m]$, area colante di monte $A_{mon}[ha]$, area colante di sinistra $A_{sin}[ha]$, area colante di destra $A_{des}[ha]$, pendenza del sottobacino di monte $i_{mon}[m/m]$, pendenza del sottobacino di sinistra $i_{sin}[m/m]$ e del sottobacino di destra $i_{des}[m/m]$).

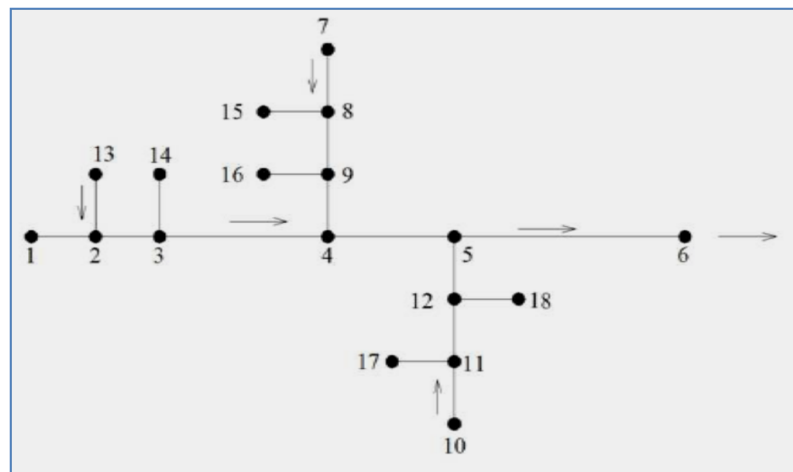


Fig.6.36 Layout rete Covelli et al (2008).

Al fine di valutare l'influenza della modellazione idrologico/idraulica, sulla soluzione ottimale, la procedura di ottimizzazione è stata eseguita utilizzando tre approcci differenti:

- Utilizzando come solutore idrologico/idraulico, il noto “Metodo dell’Invaso Italiano” (DOA-ISM), per differenti valori del volume dei piccoli invasi;
- Utilizzando come modello idrologico/idraulico, il modello dell’onda cinematica risolto con una tecnica alle differenze finite (descritta in 4.2), combinato con un modello idrologico semi-distribuito, all’interno di una procedura variazionale (DOA-CKM);

- Utilizzando il modello CPM (descritto nel cap. 4), insieme ad un modello idrologico semi-distribuito, nell'ambito di una procedura variazionale (DOA-CPM).

tratto n.	L [m]	i [m/m]	Amon [ha]	Asin [ha]	Ades [ha]	imon [m/m]	isin [m/m]	ival [m/m]
2-3	220	0.001	0	6.9	8	0	0.001	0.0011
14-3	530	0.0015	12	10	11.8	0.0015	0.002	0.0018
3-4	450	0.001	0	9	11.4	0	0.0013	0.0014
16-9	300	0.002	4	6.8	8.9	0.0021	0.0023	0.0025
8-9	250	0.002	0	4	4	0	0.0012	0.0016
9-4	350	0.0008	0	7.8	4.3	0	0.0012	0.0014
4-5	450	0.0012	0	6.5	5	0	0.0016	0.0015
11-12	310	0.0016	0	6.5	5.6	0	0.0016	0.0014
18-12	260	0.002	8	4.5	6.9	0.0018	0.0014	0.002
12-5	260	0.0014	0	5	7	0	0.0021	0.0019
5-6	510	0.0009	0	9.5	10	0	0.0012	0.0014
7-8	350	0.0022	4	9	11	0.002	0.0023	0.0009
15-8	380	0.0017	5	8	11.5	0.001	0.0012	0.0018
17-11	150	0.0015	6	4	3	0.0017	0.0018	0.0018
10-11	130	0.0018	9	5	5.6	0.0019	0.0014	0.002
1-2	150	0.002	4	8	5.4	0.0021	0.0018	0.0021
13-2	180	0.0021	5	3.9	4.6	0.0023	0.0022	0.0018

Fig.6.37 Caratteristiche rete Covelli et al (2008).

Nella presente applicazione, si è fatto uso della funzione di “fitness” descritta in 5.9, nella quale sono stati assunti i seguenti valori per i vincoli:

- La massima profondità di scavo, per il nodo finale, è stata posta pari a $1,5m$ mentre è stata posta pari a $2,0m$ in tutti gli altri nodi;
- Il limite per il franco di buona coltivazione f_{cr} , valutato rispetto alle portate frequenti Q_{fr} , è stato posto pari a $0,30m$;
- Il limite relativo al massimo tirante istantaneo, per assegnato periodo di ritorno, è stato posto pari all'altezza delle sezioni trasversali;
- La velocità limite $V_{erosione}$ è stata stimata considerando terreni costituiti da ghiaie limose, caratterizzate da un Indice di plasticità $PI=16$ e porosità $p=0.35$, mentre la concentrazione dei sedimenti trasportati dall'acqua è stata posta pari allo $0,7\%$. In tali ipotesi, la velocità $V_{erosione}$, è stata valutata mediante la relazione $V_{erosione} = 2.44 \cdot h_{fr}^{0.19}$ (USDA 1977), nella quale h_{fr} è il tirante valutato in corrispondenza della portata frequente Q_{fr} .

Assunto un periodo di ritorno $T=20\text{anni}$, si è fatto uso della seguente relazione la relazione intensità-durata di pioggia:

$$\begin{cases} i_{d,T} = 50 \cdot d^{-0.4} & 0 < d < 1 \\ i_{d,T} = 50 \cdot d^{-0.7} & d \geq 1 \end{cases};$$

dove la durata d è espressa in h , mentre l'intensità di pioggia $i_{d,T}$ in mm/h .

La portata frequente, ovvero la portata che si verifica con periodi di ritorno abbastanza piccoli, è stata stimata, solo a scopi dimostrativi, mediante la relazione $Q_{fr} = 0.1 \cdot Q_{T=20}$.

I costi di scavo sono valutati utilizzando la seguente regola:

- Per la profondità di scavo $Hexc \leq 2m$, il costo, comprensivo di scavo a sezione obbligata e trasporto a discarica di materiali, è posto pari a $9,97 \text{ €/m}^3$;
- per $2m < Hexc \leq 4m$, il costo è di $10,29 \text{ €/m}^3$.

La probabilità di mutazione m_p e di crossover c_p , sono state poste, rispettivamente, pari a $0,03$ ed 1 . Al fine di ricercare l'individuo che minimizza la la funzione di fitness FF (5.9), sono stati utilizzati i seguenti valori delle penalità: $p_{capacita} = 10^9$, $p_{vel} = 10^9$, $p_{erosione} = 10^9$, $p_{base} = 10^9$, $p_{franco} = 10^9$.

Il processo di ottimizzazione è stato effettuato rispetto alle seguenti variabili decisionali:

- Larghezza di base delle sezioni trasversali B , variabile all'interno dell'intervallo $[0.3m, 4m]$;
- Un insieme di $2^9 = 512$ pendenze longitudinali variabili nell'intervallo $[0.004m/m, 0.03m/m]$, con passo pari a $5.0880626 \cdot 10^{-5} m/m$;
- Profondità di scavo del nodo finale della rete, variabile nell'intervallo $[0.3m, 1.5m]$.

Per quanto riguarda i valori del passo temporale e spaziale, utilizzati nelle applicazioni delle procedure DOA-CKM e DOA-CPM, si è fatto uso di un passo temporale $\Delta t = 150s$ per entrambe le procedure. Mentre il passo spaziale, variabile da ramo a ramo della rete, è stato determinato dividendo ciascun tratto in un certo numero di celle N_c . Il numero di suddivisioni utilizzate nelle due procedure, è riportato nella tabella seguente.

<i>Ramo</i>	N_C <i>DOA-CPM</i>	N_C <i>DOA-CKM</i>
2-3	10	1
14-3	26	1
3-4	22	1
16-9	15	1
8-9	10	1
9-4	14	1
4-5	18	1
11-12	15	1
18-12	10	1
12-5	10	1
5-6	25	1
7-8	14	1
15-8	15	1
17-11	7	1
10-11	6	1
1-2	7	1
13-2	9	1

Fig.6.38 Riepilogo dei costi relativi alle soluzioni migliori ottenute mediante l'approccio DOA-ISM.

6.10 APPLICAZIONE 2: OTTIMIZZAZIONE MEDIANTE IL METODO DELL'INVASO ITALIANO (DOA-ISM)

La procedura di ottimizzazione, effettuata utilizzando il metodo dell'invaso italiano, quale solutore idologico/idraulico (DOA-ISM), è stata effettuata quattro volte, utilizzando diversi dei piccoli volumi di invasivo specifico w_0 , rispettivamente pari a: $w_0=0$ [l/ha]; $w_0=50$ [l/ha], $w_0=100$ [l/ha] e $w_0=150$ [l/ha]. I valori del costo, relativi alle migliori soluzioni ottenute dai vari processi di ottimizzazione, sono riassunti nella seguente tabella:

w_0 [l/ha]	<i>Fitness</i> [€]	<i>Costo</i> [€]	Q_{5-6} [m ³ /s]	<i>Profondità di scavo</i> <i>nodo finale</i> [m]
0	93187447	233400.8	10.821	1.45
50	127131.2	127131.2	7.744	1.4
100	95843.53	95843.53	5.609	1
150	80706.1	80706.1	4.459	1.3

Fig.6.39 Riepilogo dei costi relativi alle soluzioni migliori ottenute mediante l'approccio DOA-ISM.

I valori relativi alla colonna Q_{5-6} , rappresentano la al colmo di piena ottenuta nella sezione terminale del ramo 5-6. Da un esame della tabella di Fig.6.39, è possibile osservare, come d'altronde ci si aspetta, che la diminuzione dei piccoli volumi di invaso specifici w_0 , provoca un aumento significativo della portata al colmo di piena Q_{max} attraverso i rami della rete. Dunque, utilizzare valori dei piccoli volumi di invaso specifici man mano più piccoli, spinge l'algoritmo a cercare soluzioni ottimali, caratterizzate da profondità di scavo e dimensioni delle sezioni trasversali, via via crescenti e, di conseguenza, valori del costo sempre più elevati.

Un valore nullo di w_0 , non permette all'algoritmo genetico, di trovare una soluzione, all'interno dell'insieme di valori delle variabili decisionali assegnato, rispettosa dei vincoli del problema, nel senso che i canali della rete non sono in grado convogliare le portate di progetto. Questa cosa è messa chiaramente in evidenza nella tabella di Fig.6.39, nella riga relativa al caso $w_0=0$, dove si ha un valore molto alto della fitness non coincidente con il valore della sola aliquota relativa al costo economico.

<i>Ramo</i>	<i>Base [m]</i>	<i>Pendenza long. [m/m]</i>
2-3	0.5	0.00338
14-3	0.3	0.00293
3-4	0.8	0.00116
16-9	0.3	0.00243
8-9	1.5	0.00354
9-4	1.5	0.00138
4-5	2	0.0016
11-12	1	0.00238
18-12	0.3	0.0031
12-5	1	0.0036
5-6	4	0.00071
7-8	0.3	0.00232
15-8	0.3	0.00227
17-11	0.3	0.00271
10-11	0.3	0.00349
1-2	0.3	0.0036
13-2	0.3	0.00293

Fig.6.40 Valori delle larghezze di base delle sezioni e delle pendenze longitudinali relative alla soluzione ottimale ricavata dall'approccio DOA-ISM.

Il più piccolo tra i valori di w_0 presi in considerazione, per il quale l'algoritmo è in grado di generare una soluzione ottimale, rispettosa dei vincoli, è $w_0=50$ [l/ha]. Per questo motivo, è stato fatto riferimento alla soluzione ottimale, ricavata dalla procedura DOA-ISM con $w_0=50$ [l/ha], al fine di effettuare confronti con le soluzioni ottenute dagli approcci DOA-CKM e DOA-CPM.

I valori ottimali delle variabili di decisionali, ottenuti con $w_0=50$ [l/ha] sono riassunti nella tabella di Fig.6.40. Nella tabella di Fig.6.46, sempre con riferimento alla soluzione appena menzionata, sono riportati i valori delle portate al colmo di piena Q_{max} e dei massimi tirati istantanei h_{max} , nei nodi di valle dei rami della rete. Il valore della profondità di scavo nel nodo finale, è riportata nella tabella di Fig.6.39.

6.11 APPLICAZIONE 3: OTTIMIZZAZIONE MEDIANTE IL MODELLO CINEMATICO COMPLETO (DOA-CKM).

L'ottimizzazione effettuata mediante l'approccio DOA-CKM, rappresenta un ulteriore passo in avanti rispetto ai lavori presenti in letteratura tecnica in ambito di ottimizzazione delle reti di drenaggio. Infatti, in tale applicazione, viene fatto uso per la prima volta, all'interno di un algoritmo di ottimizzazione delle reti di drenaggio, del modello Idrologico-Idraulico semi distribuito, abbinato ad una procedura variazionale, finalizzata alla determinazione delle peggiori condizioni rispetto alle quali effettuare l'ottimizzazione. Dunque, per la prima volta, le portate di progetto non vengono trattate come dati del problema, ma vengono determinate in relazione alle caratteristiche geometriche di ogni soluzione generata dall'algoritmo genetico. Inoltre, l'utilizzo dell'approccio variazionale, consente di superare tutti i problemi legati all'individuazione dello "ietogramma di progetto".

<i>Fitness</i> [€]	<i>costo</i> [€]	Q_{5-6} [m ³ /s]	<i>Profondità di scavo</i> <i>nodo finale</i> [m]
142015.6	142015.6	7.453	1.45

Fig.6.41 Valori della fitness e del costo economico relativi alla soluzione ottimale ricavata dall'approccio DOA-CKM.

I risultati, in termini di valori della fitness e dell'aliquota relativa al costo economico, corrispondenti alla soluzione ottimale determinata mediante l'approccio DOA-CKM, sono riassunti, insieme alla portata al colmo di piena Q_{5-6} , nel nodo finale del tratto 5-6, nella tabella di Fig.6.41. Nella tabella seguente, invece, sono riportati i valori ottimali delle variabili decisionali (larghezze di base e pendenze longitudinali).

<i>Ramo</i>	<i>Base [m]</i>	<i>Pendenza long. [m/m]</i>
2-3	0.5	0.00267
14-3	0.3	0.00228
3-4	0.8	0.00166
16-9	0.3	0.005
8-9	0.3	0.00243
9-4	1	0.00064
4-5	1.5	0.00142
11-12	1.5	0.00127
18-12	0.8	0.00274
12-5	1.5	0.00492
5-6	4	0.00064
7-8	0.3	0.00446
15-8	0.3	0.00352
17-11	0.5	0.00383
10-11	0.3	0.00337
1-2	0.5	0.00461
13-2	0.3	0.00399

Fig.6.42 Valori delle larghezze di base delle sezioni e delle pendenze longitudinali relative alla soluzione ottimale fornita dall'approccio DOA-CKM.

Confrontando i risultati ottenuti con il DOA-CKM, a quelli ottenuti in precedenza con il DOA-ISM, si può notare che il costo della rete è superiore di circa il 15%. Ciò è dovuto al fatto che le portate valutate con il modello cinematico completo, sono più alte rispetto al metodo dell'invaso italiano ($w_0=50$ [l/ha]). Dunque l'ottimizzazione effettuata mediante il DOA-CKM, rispetto al DOA-ISM, porta a soluzioni caratterizzata da costi economici moderatamente più elevati, ma più cautelative in termini di sicurezza, quindi, l'approccio DOA-CKM può essere visto come un miglioramento, rispetto all'approccio DOA-ISM, come, dopotutto, era ovvio aspettarsi.

6.12 APPLICAZIONE 4: OTTIMIZZAZIONE MEDIANTE IL MODELLO CPM (DOA-CPM)

In ultima analisi, è stata applicata la procedura DOA-CPM. Tale procedura rappresenta un ulteriore passo in avanti rispetto ai lavori reperibili in letteratura tecnica in tema di optimal design delle reti di drenaggio. Infatti, per la prima volta, l'ottimizzazione della rete di drenaggio viene effettuata, non solo facendo uso di un solutore idrologico/idraulico semi-distribuito, abbinato ad un approccio variazionale finalizzato alla ricerca delle massime portate al colmo di piena e dei massimi istantanei dei tiranti idrici, ma anche facendo uso di un modello idraulico nel quale viene rimossa l'ipotesi di moto uniforme. Questo fatto ha permesso di tenere conto, all'interno della procedura di ottimizzazione, dei tiranti idrici rigurgitati da valle, conducendo ad un'approccio alla progettazione ottimizzata più corretto dal punto di vista concettuale.

Nella tabella di Fig.6.43, sono riportati i valori della fitness e dell'aliquota relativa al costo, della soluzione ottimale fornita dalla procedura DOA-CPM, insieme alla portata al colmo di piena nel ramo 5-6 ed al valore della profondità di scavo nel nodo terminale della rete.

<i>Fitness</i> [€]	<i>costo</i> [€]	Q_{5-6} [m ³ /s]	<i>Profondità</i> <i>di scavo</i> <i>nodo</i> <i>finale</i> [m]
136473.1	136473.1	6.794	1.45

Fig.6.43 Valori della fitness e del costo economico relativi alla soluzione ottimale ricavata dall'approccio DOA-CPM.

La soluzione ottenuta mediante l'impiego del DOA-CPM, presenta un costo leggermente più basso rispetto alla soluzione fornita dal DOA-CKM. Quest'ultimo fatto è del tutto inaspettato, in quanto, essendo il modello CPM in grado di simulare fenomeni di rigurgito da valle, ci si poteva aspettare dimensioni delle sezioni maggiori e, quindi, un costo economico più elevato. I valori delle variabili decisionali, relativi alla soluzione ottenuta mediante l'impiego del DOA-CPM, sono riportati nella tabella di Fig.6.44.

<i>Ramo</i>	<i>Base [m]</i>	<i>Pendenza long. [m/m]</i>
2-3	0.5	0.0043
14-3	0.3	0.00298
3-4	0.5	0.00088
16-9	0.3	0.00484
8-9	0.8	0.00446
9-4	0.8	0.00072
4-5	2	0.00119
11-12	0.3	0.00383
18-12	0.3	0.005
12-5	0.3	0.0008
5-6	3	0.00088
7-8	0.5	0.0029
15-8	0.3	0.00173
17-11	0.3	0.00446
10-11	0.3	0.00484
1-2	0.3	0.00376
13-2	0.3	0.00376

Fig.6.44 Valori delle larghezze di base delle sezioni e delle pendenze longitudinali relative alla soluzione ottimale fornita dall'approccio DOA-CKM.

Confrontando i valori delle variabili decisionali ottimali, ottenute con il DOA-CPM, con quelli ottenuti dal DOA-CKM, si ha un'idea di come la modellazione idraulica influisce sulla soluzione ottimale.

6.13 CONFRONTI TRA I RISULTATI OTTENUTI CON I VARI APPROCCI E CONSIDERAZIONI.

Nella tabella riportata in Fig.6.45, vengono riepilogati i valori delle variabili decisionali ottimali, ottenuti dai vari approcci utilizzati. Da un'analisi di suddetta tabella, è possibile osservare come i valori delle variabili decisionali ottimali, forniti dai vari approcci impiegati, siano abbastanza differenti tra di loro. Questo fatto mostra come il tipo di modellazione idraulica utilizzata, all'interno del processo di ottimizzazione, influenza la soluzione ottima. Concettualmente va ricordato che nel modello ISM, viene fatta l'ipotesi di funzionamento "sincrono" ed "autonomo" della rete, mentre con il modello CKM si ha la rimozione dell'ipotesi di funzionamento "sincrono". Il

modello CPM consente di rimuovere, oltre all'ipotesi di sincronismo, anche l'ipotesi di autonomia. Inoltre l'ISM ed il CKM sono modelli basati sull'ipotesi di moto uniforme.

Ramo	Larghezze di base [m]			Pendenze longitudinali [m/m]		
	ISM w0=50	CKM	CPM	ISM w0=50	CKM	CPM
2-3	0.5	0.5	0.5	0.00338	0.00267	0.0043
14-3	0.3	0.3	0.3	0.00293	0.00228	0.00298
3-4	0.8	0.8	0.5	0.00116	0.00166	0.00088
16-9	0.3	0.3	0.3	0.00243	0.005	0.00484
8-9	1.5	0.3	0.8	0.00354	0.00243	0.00446
9-4	1.5	1	0.8	0.00138	0.00064	0.00072
4-5	2	1.5	2	0.0016	0.00142	0.00119
11-12	1	1.5	0.3	0.00238	0.00127	0.00383
18-12	0.3	0.8	0.3	0.0031	0.00274	0.005
12-5	1	1.5	0.3	0.0036	0.00492	0.0008
5-6	4	4	3	0.00071	0.00064	0.00088
7-8	0.3	0.3	0.5	0.00232	0.00446	0.0029
15-8	0.3	0.3	0.3	0.00227	0.00352	0.00173
17-11	0.3	0.5	0.3	0.00271	0.00383	0.00446
10-11	0.3	0.3	0.3	0.00349	0.00337	0.00484
1-2	0.3	0.5	0.3	0.0036	0.00461	0.00376
13-2	0.3	0.3	0.3	0.00293	0.00399	0.00376

Fig.6.45 Valori delle variabili decisionali ottimali fornite dai vari approcci.

Le varie ipotesi di funzionamento della rete, alla base dei diversi modelli impiegati, possono in parte spiegare le differenze che si hanno tra le soluzioni. Infatti, i valori delle larghezze di base, ottenuti con l'approccio DOA-CPM, sono mediamente più contenuti rispetto a quelli ottenuti dall'applicazione del DOA-CKM. Ciò può essere dovuto al fatto che rimuovendo l'ipotesi di funzionamento autonomo della rete, la ricerca dei valori ottimali delle variabili decisionali, viene effettuata considerando il comportamento della rete nel suo complesso, ovvero, considerando l'influenza che la geometria dei rami situati nei punti più a valle esercita sui rami a monte dal punto di vista idraulico. Ciò è messo in evidenza anche dai valori delle pendenze longitudinali, ottenuti con il DOA-CPM, che sono mediamente più alti rispetto ai valori della soluzione ottima fornita dal DOA-CKM.

La soluzione ottenuta con il DOA-ISM presenta valori delle larghezze di base simili a quelle relative alla soluzione ricavata con l'impiego del DOA-CPM, mentre le pendenze longitudinali, presentano valori intermedi tra la soluzione ottenuta con il

DOA-CKM e il DOA-CPM. La causa di ciò può essere in parte attribuita alle ipotesi sul funzionamento di rete del modello ISM, ed in parte alle difficoltà legate alla scelta dei valori di w_0 da attribuire ad ogni singolo ramo della rete. Infatti, come è stato possibile vedere in precedenza, i valori delle portate dipendono in maniera molto forte dalla scelta di suddetto parametro ed in generale non esiste un criterio per stabilire, in maniera corretta, i valori da attribuire al w_0 per ogni singolo tratto della rete.

Nella tabella seguente, sono riportati i valori delle massime portate al colmo di piena e dei massimi istantanei dei tiranti idrici, in ogni tratto della rete ottimale, per tutti gli approcci utilizzati.

	Massime portate al colmo di piena [m ³ /s]			Massimi istantanei dei tiranti idrici [m]		
	CPM	CKM	ISM w0=50	CPM	CKM	ISM w0=50
2-3	1.055	1.055	0.998	1.415	0.778	0.715
14-3	0.775	0.706	0.301	1.417	0.748	0.48
3-4	2.311	2.348	2.333	1.381	1.125	1.221
16-9	0.725	0.687	1.371	1.433	0.62	0.98
8-9	1.75	1.769	1.987	1.419	1.095	0.678
9-4	2.754	2.781	3.07	1.394	1.437	1.096
4-5	5.109	5.298	5.516	1.395	1.437	1.278
11-12	1.174	1.157	1.174	1.38	0.664	0.675
18-12	0.597	0.569	0.645	1.39	0.456	0.632
12-5	1.947	2.02	2.025	1.438	0.621	0.805
5-6	6.794	7.453	7.744	1.394	1.404	1.395
7-8	0.695	0.654	0.583	0.865	0.623	0.684
15-8	0.871	0.816	0.286	0.861	0.724	0.507
17-11	0.367	0.35	0.314	0.911	0.415	0.499
10-11	0.463	0.46	0.303	0.907	0.561	0.462
1-2	0.404	0.398	0.272	0.775	0.423	0.436
13-2	0.362	0.338	0.432	0.778	0.472	0.567

Fig.6.46 Massimi dei tiranti idrici istantanei e delle portate al colmo di piena relativi alle tre reti ottimali.

Come è possibile osservare, dalla tabella di Fig.6.46, i massimi istantanei dei tiranti idrici, calcolati con il modello CPM, risultano essere, mediamente, molto più elevati dei tiranti calcolati con gli altri due modelli, nonostante le portate siano molto simili.

In virtù di questo fatto, è stata eseguita una verifica delle reti ottimali, determinate con i modelli CKM e ISM, utilizzando il solo modello idrologico/idraulico combinato

all'approccio variazionale. Nell'ambito di tale verifica, è stato fatto uso del CPM come modello idraulico, in quanto si è rivelato essere un modello capace di restituire risultati molto affidabili. I risultati di suddetta verifica sono riportati nella tabella che segue (dove $H_{up,exc}$ e $H_{dw,exc}$ rappresentano, rispettivamente, le profondità di scavo di monte e di valle, mentre $h_{up,max}$ e $h_{dw,max}$ i tiranti massimi di monte e valle).

tratto	CKM vs CPM				MII ($w_0 = 50$) vs CPM			
	$H_{up,exc}$	$h_{up,max}$	$H_{dw,exc}$	$h_{dw,max}$	$H_{up,exc}$	$h_{up,max}$	$H_{dw,exc}$	$h_{dw,max}$
	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]
2-3	0.819	0.793	1.185	1.154	0.723	0.793	1.246	1.154
14-3	0.773	0.772	1.185	1.158	0.487	0.772	1.246	1.158
3-4	1.185	1.109	1.48	1.409	1.246	1.109	1.316	1.409
16-9	0.635	0.634	1.535	1.406	0.984	0.634	1.114	1.406
8-9	1.426	1.098	1.535	1.383	0.728	1.098	1.114	1.383
9-4	1.535	1.377	1.48	1.407	1.114	1.377	1.316	1.407
4-5	1.48	1.352	1.58	1.211	1.316	1.352	1.496	1.211
11-12	0.768	0.658	0.665	0.69	0.683	0.658	0.924	0.69
18-12	0.471	0.465	0.665	0.724	0.638	0.465	0.924	0.724
12-5	0.665	0.6	1.58	1.306	0.924	0.6	1.496	1.306
5-6	1.58	1.265	1.45	1.277	1.496	1.265	1.4	1.277
7-8	0.637	0.638	1.426	1.159	0.685	0.638	0.728	1.159
15-8	0.734	0.743	1.426	1.153	0.513	0.743	0.728	1.153
17-11	0.418	0.425	0.768	0.684	0.502	0.425	0.683	0.684
10-11	0.564	0.566	0.768	0.669	0.464	0.566	0.683	0.669
1-2	0.427	0.426	0.819	0.845	0.483	0.426	0.723	0.845
13-2	0.479	0.486	0.819	0.844	0.573	0.486	0.723	0.844

Fig.6.47 Verifiche reti DOA-CKM e DOA-ISM, rispetto ai massimi tiranti istantanei.

La tabella sopra esposta, mostra chiaramente come le due reti ottimali, verificate mediante un modello più realistico, non rispettano il vincolo relativo all'esonazione in diverse sezioni della rete. Quest'ultimo fatto non è del tutto inaspettato, infatti, i modelli ISM e CKM, sono basati sull'ipotesi di moto uniforme. Di conseguenza, non sono in grado di tenere in conto il fenomeno dei tiranti idrici rigurgitati da valle, normalmente presente nelle reti di drenaggio, portato ad una sottostima dei tiranti idrici. Nelle Fig.6.48, Fig.6.49 e Fig.6.50, sono riportati gli idrogrammi di piena, valutati mediante il CPM il CKM e il CKM con la stessa discretizzazione spaziale usata per il CPM, per alcuni tratti della rete. Mentre nelle Fig.6.51, Fig.6.52 e Fig.6.53.,

sono riportati, per gli stessi rami, i tirantogrammi. Tali grafici sono stati determinati utilizzando una durata di pioggia vicina alla durata critica (3600s).

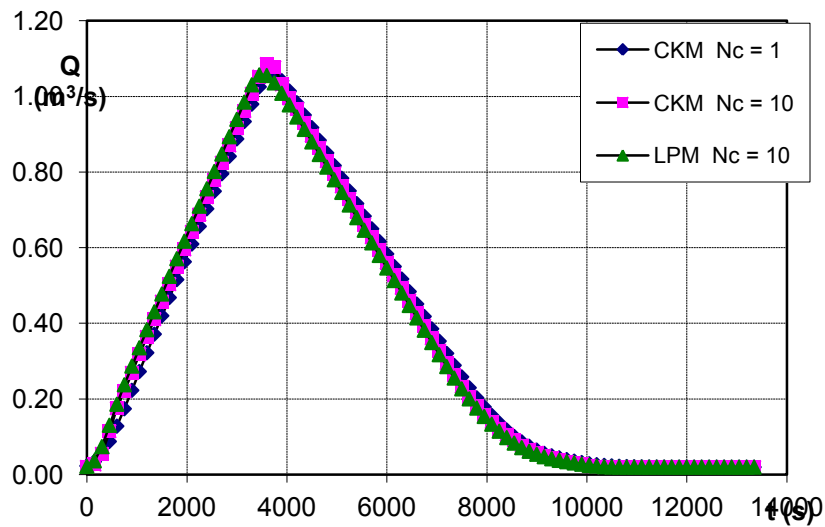


Fig.6.48 Idrogrammi nella sezione terminale del tratto 2-3.

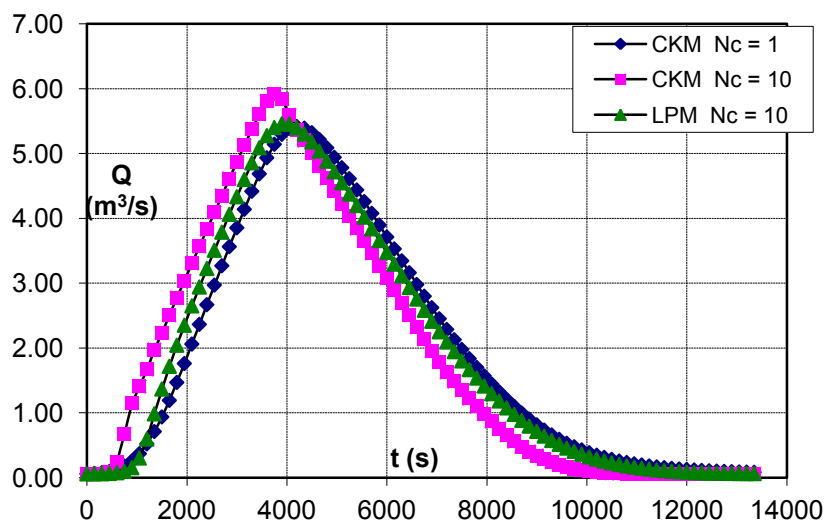


Fig.6.49 Idrogrammi nella sezione terminale del tratto 4-5.

Come è possibile notare, gli idrogrammi di piena sono molto simili tra di loro, ma non è possibile dire lo stesso per quello che riguarda i tirantogrammi.

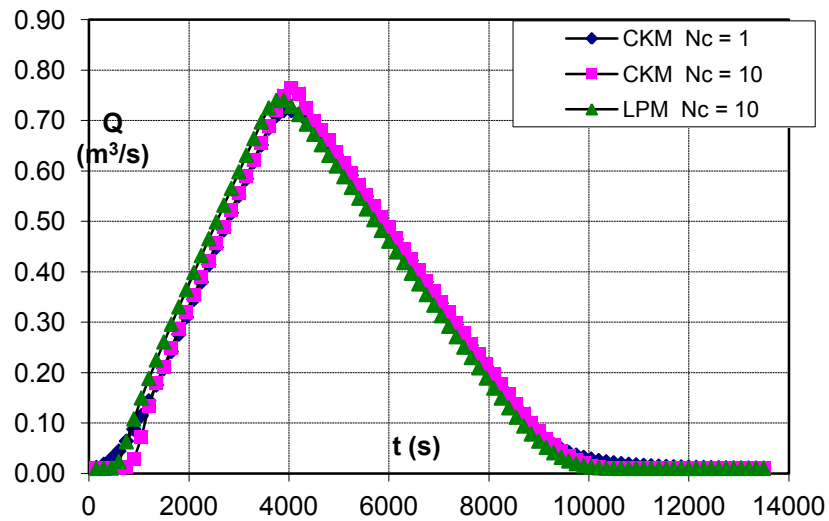


Fig.6.50 Idrogrammi nella sezione terminale del tratto 14-3.

Infatti, come mostrato dai grafici che seguono, in alcuni casi, i tirantogrammi calcolati mediante l'impiego del CPM, possono raggiungere picchi di valore doppio, rispetto ai picchi degli idrogrammi calcolati con il modello CKM.

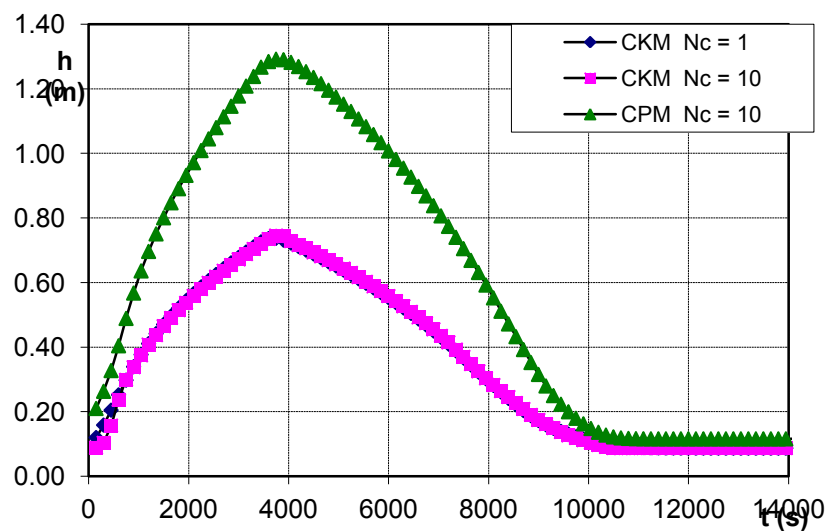


Fig.6.51 Tirantogrammi nella sezione terminale del tratto 2-3.

Dunque risulta evidente come l'impiego di modelli basati su ipotesi di moto uniforme porti ad una sottostima dei tiranti idrici.

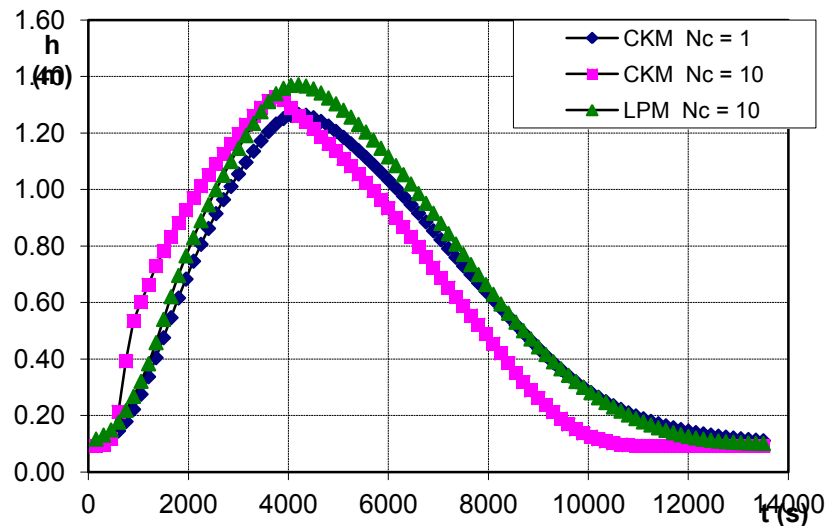


Fig.6.52 Tirantogrammi nella sezione terminale del tratto 4-5.

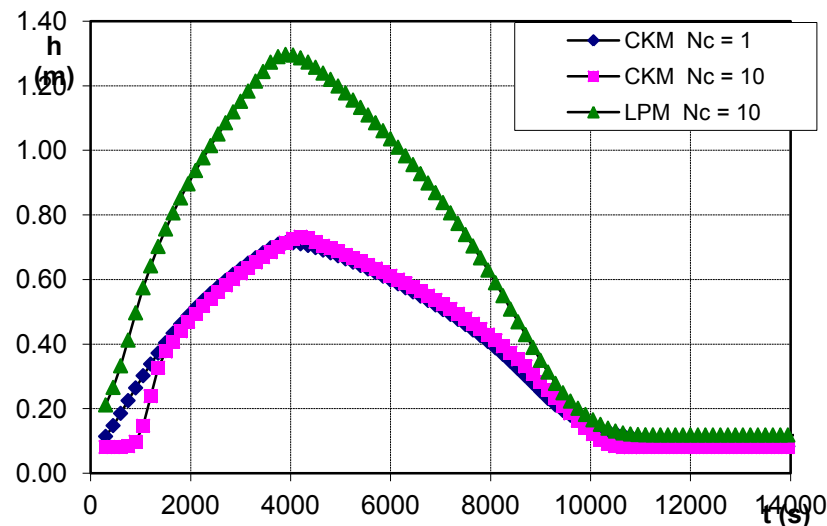


Fig.6.53 Tirantogrammi nella sezione terminale del tratto 14-3.

Le carenze, circa la rappresentazione fisica dei fenomeni di propagazione, messe in evidenza dei grafici sopra riportati, influiscono negativamente sulla progettazione ottimizzata. Risulta evidente che l'impiego di modelli troppo semplificati può portare ad un dimensionamento della rete che, seppur ottimale in termini di costo, risulta essere solo apparentemente sicuro. Questo fatto dimostra che, nell'ambito della progettazione ottimizzata, modelli di propagazione più realistici dovrebbero essere preferiti a quelli eccessivamente semplificati, che normalmente vengono utilizzati in campo tecnico.

CONCLUSIONI

Il lavoro svolto nell'ambito della presente Tesi di Dottorato è stato finalizzato alla ricerca di un nuovo tipo di approccio per la progettazione delle reti di drenaggio.

Negli ultimi anni, tale tematica è stata affrontata da diversi autori con le più varie tecniche di ottimizzazione a disposizione; tuttavia, nei numerosi lavori disponibili in letteratura, non viene mai affrontato il problema dell'individuazione delle piogge di progetto e delle relative durate, che massimizzano le portate e, soprattutto, i tiranti idrici realizzabili nelle varie sezioni della rete. Inoltre, i calcoli idraulici, sia a livello di singolo tronco che di rete nel suo complesso, viene effettuato, quasi sempre, nell'ipotesi di moto localmente ed istantaneamente uniforme.

Al fine di superare tali problematiche, nel capitolo 2 è stato descritto un metodo per l'individuazione delle massime portate al colmo di piena e dei massimi istantanei dei tiranti idrici. Tale metodo consiste nell'impiego di un *modello idrologico-idraulico semidistribuito*, da utilizzare all'interno di un approccio "variazionale" o "estremante". Ciò permette il superamento del problema legato alla determinazione dello "ietogramma di progetto", mai affrontato, fino ad ora, in letteratura tecnica nei lavori riguardanti la progettazione ottimizzata delle reti di drenaggio. La metodologia di analisi proposta è di tipo probabilistico, in quanto consente di valutare le portate al colmo di piena che affluiscono a specifiche sezioni di riferimento, debitamente posizionate lungo i vari tronchi della rete, a partire da piogge di assegnato periodo di ritorno; inoltre, risulta essere, nel contempo, idrologicamente ed idraulicamente basata, in quanto è in grado di sfruttare un qualsiasi modello semi-distribuito, nell'ambito del quale può, a sua volta, essere utilizzato un qualsiasi modello idraulico per la propagazione delle piene

Nel capitolo 3 sono stati descritti, a partire dalle equazioni complete del *de Saint Venant*, i vari modelli matematici a disposizione per la descrizione del moto vario nelle correnti a pelo libero.

Nel capitolo 4 è stato fornito un modello idraulico semplificato, in grado di descrivere tutti i fenomeni connessi al passaggio di un'onda di piena che possono realizzarsi all'interno di una rete di drenaggio urbana o rurale (risalti idraulici, tiranti idrici rigurgitati da valle, passaggio da correnti a superficie libera a correnti in pressione

al'interno di reti fognarie ecc.). Tale modello, denominato CPM, è stato costruito a partire da soluzioni analitiche dell'equazione linearizzata, per diverse condizioni al contorno ed iniziali, dell'approssimazione parabolica delle equazioni del de Saint Venant.

Tale modello risulta essere incondizionatamente stabile per qualunque scelta del passo temporale e del passo spaziale. Questa stabilità "incondizionata", permettendo di scegliere intervalli spaziali e temporali di calcolo molto ampi, riduce di molto il costo computazionale del modello, che quindi, si presta molto bene ad essere impiegato molteplici volte (anche decine di migliaia) all'interno di un processo di ottimizzazione. Inoltre, il modello CPM risulta essere di facile implementazione e, quindi, proponibile ed utilizzabile anche in campo tecnico.

Nel capitolo 5 sono stati descritti, in maniera dettagliata, gli algoritmi genetici (GA) ed, in particolare, l'algoritmo genetico utilizzato. Tale algoritmo, rispetto ai GA più tradizionali, fa uso dell'operatore "Elitismo" e, per tale motivo, viene denominato EGA. Inoltre sono state fornite indicazioni su quali fossero le più opportune tecniche da utilizzare per i vari "operatori genetici" che, nella loro *consecutio logica*, vengono a costituire il GA, al fine di trattare, nella maniera più idonea possibile, il problema della progettazione ottimizzata delle reti di drenaggio.

Nel capitolo 6 sono stati esposti tutti i test effettuati allo scopo di effettuare una verifica delle effettive potenzialità del modello di propagazione sviluppato nel capitolo 4. I suddetti test sono stati eseguiti sia con riferimento a dati sperimentali, sia con riferimento a modelli di moto vario completi. I risultati ottenuti in base a tali test mostrano che il modello *CPM* è un modello molto efficace, in grado di fornire risultati abbastanza accurati ed in maniera molto rapida, per diverse scelte degli intervalli, spaziali e temporali, di calcolo.

Successivamente, nell'ambito dello stesso capitolo, sono stati esposti due test, in riferimento a due casi di studio prelevati dalla letteratura tecnica, volti a stabilire l'efficacia dell'EGA sviluppato nell'ambito del presente lavoro di tesi. In tali test, la procedura di ottimizzazione proposta ha fornito soluzioni caratterizzate da costi alquanto più ridotti dei costi ottenuti, in base ad approcci analoghi e non, da altri autori. Tale risultato è stato conseguito a valle di numerose simulazioni, grazie alle quali è stato possibile ricercare quali fossero le tecniche migliori da utilizzare per i vari operatori genetici ("*Selezione*", "*Cross Over*" e "*Mutazione*"), e quali fossero i valori

dei parametri genetici (*probabilità di mutazione, probabilità di cross over* ecc.) più idonei per il problema da trattare.

Il presente lavoro si è concluso con l'applicazione della procedura sviluppata ad un caso di studio prelevato dalla letteratura tecnica, relativo ad una rete di bonifica di media grandezza. In tale applicazione, l'ottimizzazione è stata effettuata con riferimento a tre diversi modelli di propagazione delle piene, ovvero, il noto "Metodo dell'Invaso Italiano" (molto utilizzato, almeno in Italia, in ambito tecnico), il modello dell'"Onda Cinematica" (molto utilizzato, a livello internazionale, in ambito tecnico) ed il modello CPM (fin qui utilizzato, in campo tecnico, con riferimento a singoli rami). I tre approcci al problema della progettazione ottimizzata derivanti, rispettivamente, dall'applicazione di ciascuno di questi tre modelli di propagazione sono stati denominati, rispettivamente, DOA-ISM, DOA-CKM e DOA-CPM.

Dai test effettuati, si è potuto constatare come l'utilizzo, all'interno di un processo di progettazione ottimale delle reti di drenaggio, di un modello di propagazione eccessivamente semplificato, porti a soluzioni che, pur differendo poco in termini economici, risultano, rispetto alle soluzioni di un modello più realistico, solo apparentemente funzionali.

Ne deriva che, al fine di effettuare una corretta progettazione delle reti di drenaggio, modelli idraulici più realistici, sebbene leggermente più complessi di quelli usualmente adottati in campo tecnico, dovrebbero essere preferiti rispetto a modelli eccessivamente semplificati, basati su ipotesi di moto almeno localmente ed istantaneamente uniforme.

BIBLIOGRAFIA

- Abramowitz, M., Stegun, I.A., 1972. Handbook of Mathematical Functions. *Dover Publications Inc.*, N.Y.
- Afshar A. e Zamani H., *An improved storm water network design model in spreadsheet template*, Int. J. of Engrg. and Science, Iran University of Science and Technology, 2002, 13 (4), pp. 135-148.
- Anwar, A.A. & Clarke, D. *Design of hydraulically efficient power-law channels with freeboard*, Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 2005, 131 (6), pp. 560-563.
- Afshar M.H., *Application of a genetic algorithm to storm sewer network optimization*, Scientia Iranica, July 2006, vol.13 No. 3, pp. 234-244.
- Afshar M.H., Afshar A., Marino M.A., Darbandi A.A.S., *Hydrograph-based storm sewer design optimization by genetic algorithm*, Canadian Journal Civil Engineering, 2006, vol. 33, pp. 319-325.
- Afshar, M.H. Improving the efficiency of ant algorithms using adaptive refinement: Application to storm water network design, *Advances in Water Resources*, 2006, 29, 1371-1382.
- Afshar, M.H. Partially constrained ant colony optimization algorithm for the solution of constrained optimization problems: Application to storm water network design, *Advances in Water Resources*, 2007, 30, 954-965.
- Afshar, M.H. A parameter free continuous ant colony optimization algorithm for the optimal design of storm sewer networks: Constrained and unconstrained approach, *Advances in Engineering Software*, 2010, 41, 188-195.
- Akan O.A., Yen B. Diffusion-wave flood routine in channel networks, *Journal of Hydraulic Division*, 1981, vol.107, pp. 719-732.
- Arfken, Weber, *Mathematical Methods for Physicists*. Orlando, FL: Academic Press, 1985

- Bajracharya K, Barry DA. *Accuracy criteria for linearised diffusion wave flood routing*. J Hydrol 1997;195:200–17.
- Barreto, W.J., Price, R.K., Solomatine, D.P. & Vojinovic, Z. *Approaches to multi-objective multitier optimization in urban drainage planning*, 7th International Conference on Hydroinformatics-HIC 2006, Nice, France, 2006.
- Bhattacharjya, R.K. & Satish, M. *Optimal design of a stable trapezoidal channel section using hybrid optimization techniques*, Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 2007, 133 (4), pp. 323-329.
- Bhattacharjya, R.K. & Satish, M. *Optimal design of a stable trapezoidal channel section using hybrid optimization techniques*, Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 2008, 134 (4), pp. 405-408.
- Biggiero V. e Pianese D., *Sul proporzionamento delle reti di bonifica*, Scritti in onore di Mario Ippolito, CUEN srl, Napoli, 1996, pp.643-656.
- Chow V.T. (1959) Open-channel hydraulics. McGraw-Hill, New York.
- Cimorelli L., Covelli C., Mucherino C., Palumbo A., Pianese D., *Sulle possibilità di una valutazione dei massimi istantanei delle portate al colmo e dei tiranti idrici nelle reti di drenaggio attraverso modelli idrologici semi-distribuiti caratterizzati da diversi livelli di semplificazione della realtà fenomenologica*, Report interno n°23 del Dipartimento di Ingegneria Idraulica, Geotecnica ed Ambientale, 2009.
- Covelli C., Mucherino C., Palumbo A., Pianese D., *Sulla valutazione dei massimi istantanei delle portate e dei tiranti idrici nelle reti di drenaggio*, Atti del XXXI° Convegno Nazionale di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Perugia, Italia, settembre 2008.
- Covelli C., Mucherino C., Pianese D., *Ottimizzazione, su base probabilistica, delle reti di distribuzione idrica mediante l'uso di algoritmi genetici*, Atti del Convegno “Approvvigionamento e Distribuzione Idrica: Esperienza, Ricerca ed Innovazione”, Ferrara, Italia, giugno 2007.
- Cowpertwait, P., 1995. A generalized spatial-temporal model of rainfall based on a clustered point process. *Proceedings Royal Society London*, A 450,163-175.

- Della Morte, R., Iavarone, V. & Pianese, D. Evaluation of maximum flow depths and discharges in drainage networks by a simplified model coupled to a variational approach, Proceedings of the XXIX IAHR Congress, Pechino, Settembre 2001.
- Della Morte, R., Matarazzi, C. & Pianese, D. Sulla possibilità di utilizzazione dell'approccio variazionale per l'individuazione delle massime portate defluenti nelle reti di drenaggio, Atti del XXVII Convegno di Idraulica e di Costruzioni Idrauliche, Genova, Settembre 2000.
- Das, A. *Optimal channel cross section with composite roughness*, Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 2000, 126 (1), pp. 68-72.
- Das, A. *Flooding probability constrained optimal design of trapezoidal channels*, Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 2007, 133 (1), pp. 53-60.
- Dandy G.C. e Engelhardt M., *Optimal Scheduling of Pipe Replacement Using Genetic Algorithms*, J. Water Resour. Plann. Manage, ASCE, 2001, 127 (4), pp. 214-223.
- DHI, (1994). Hydraulic Institute user Manual and Reference Manual (MOUSE), DHI.
- Dajani, J.S., Gemmel, R.S., 1971. Economics of wastewater collection networks, *Civil Eng. Res. Rep. 43*, Water Resour. Center, Univ. of Ill. At Urbana-Champaign, Urbana.
- Deininger, R.A., 1970. *Systems analysis for water supply and pollution control, Natural Resource Systems Models in decision Making*, edited by G.H. Toebes, Water Resources Center, Purdue Univ. Lafayette, Ind., 45-65.
- Deymie, P. _1938_. "Propagation d'une intumescence allongée _problème aval_." *Proc. Fifth Int. Congr. Appl. Mech.*, Cambridge, Mass., 537-544.
- Denisov, V.M., Pak, A.V., 2009. *A Methodology of Determination of the Maximum Water Discharges and Volume of Rain Floods in Small Catchments*, Russian Meteorology and Hydrology, 2009, Vol.34, No.12, Allerton Press, Inc., 818-827.
- Doetsch G., 1961, *Guide to Applications of Laplace Transforms*, Van Nostrand, New York.

- Dooge JCI, Kundzewicz ZW, Napiorkowski JJ. *On back water effects in linear diffusion routing*. Hydrol Sci J 1983;28:391–402.
- Elimam A.A., Charalambous C., Ghobrial F.H., *Optimum design of large sewer networks*, ASCE Journal of Environmental Engineering, 1989, 115(6), pp. 1171-1189.
- Franchini, M. and Todini, E., 1989. “*PABL: a parabolic and backwater scheme with lateral inflow and outflow*.” Fifth IAHR International Symposium on Stochastic Hydraulics, Report No. 10, Institute for Hydraulic Construction, University of Bologna.
- Fread, Ming & Lewis (1996) “An LPI numerical implicit solution for unsteady mixed flow simulation”. North American Water And Environment Congress. ASCE.
- Froehlich, D.C. *Width and depth-constrained best trapezoidal section*, Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 1994, 120 (4), pp. 828-835.
- Goldberg D.E., *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass, 1989.
- Guo, C.Y. & Hughes, W.C. *Optimal channel cross section with freeboard*, Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 1984, 110 (3), pp. 304-314.
- Halhal D., Walters G.A., Savic D. A., *Water Network Rehabilitation with Structured Messy Genetic Algorithms*, J. Water Resour. Plann. Manage, ASCE, 1997, 123 (3), pp. 137-146.
- Hayami S. *On the propagation of flood waves*. Disaster Prev Res Inst Bull 1951;1:1–16.
- Henderson, F. M., 1966. *Open Channel Flow*, MacMillan Publishing Co. Inc., New York, New York.
- Holland J. H., *Adaptation in natural and artificial systems*, MIT Press Cambridge Mass, 1975.
- Izquierdo, J., Montalvo, I., Pérez, R., Fuertes, V.S., 2008. Design optimization of wastewater collection networks by PS, *Computer and Mathematics with Applications*, 56, 777-784.

- Jain, A., Bhattacharjya, R.K. & Srinivasulu, S. *Optimal design of composite channels using genetic algorithm*, Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 2004, 130 (4), pp. 286-295.
- Keifer, J.C., Chu, H.H. Synthetic storm pattern for drainage design, Journal of Hydraulic Division, 1957, vol.83.
- Leòn, A.S., Ghidaoui, M.S., Schmidt, A.R., Garcia, M.H. (2009). *Application of Godunov-type schemes to transient mixed flows*. J. Hydraulic Res. 47(2), 147–156.
- LeVeque, R.J. (2002). *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge Press, Cambridge, UK.
- Li G. e Matthew R.G.S., *New approach for optimization of urban drainage systems*, ASCE Journal of Environmental Engineering, 1990, 116 (5), pp. 921-944.
- Loganathan, G.V. *Optimal design of parabolic canals*, Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 1991, 117 (5), pp. 716-735.
- Masse, P. _1935_. *Hydrodynamique fluviale. Règimes variables*, Hermann, Paris.
- Mays, W.L. & Yen, B.C. *Optimal cost design of branched sewer systems*, Water Resources Research, 1975, 11(1), 37-47.
- Mays, W.L. & Wenzel H.G. *Optimal design of multilevel branching sewer systems*, Water Resources Research, 1976, 12(5), 913-917.
- Mays, L.W., Wenzel, H.G. & Liebman, J.C. *Model for layout and design of sewer systems*, Journal of the Water Resources Planning and Management Division, 1976, 102(WR2), 385-405.
- Miles, S.W. & Heaney, J.P. *Better then optimal method for designing drainage systems*, Journal of Water Resources Planning and Management, 1988, 114 (5), 477-499.
- Martin, C.S. (1976). *Entrapped air in pipelines*. Proc. 2nd Intl. Conf., Pressure Surges, British Hydromechanics Research Association, Cranfield, UK, 15 28.
- Molinas, A., Yang, C. T., 1985. *Generalized water surface profile computations*. ASCE Journal of Hydraulic Engineering. 111(3), 381-397..

- Journal of Hydraulic Engineering*. 111(3), 381-397.
- Monadjemi, P. *General formulations of best hydraulic channel section*, Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 1994, 120 (1), pp. 27-35.
- Morgan, D. & Goulter, I.C. *Optimal urban water distribution design*, Water Resources Research, 1985, 21(5), pp- 642-652.
- Morse, P. M., and Feshbach, H. _1953_. *Methods of theoretical physics*, McGraw-Hill, New York.
- Moussa, R. (1996). “Analytical Hayami solution for the diffusive wave flood routing problem with lateral inflow.” *Hydrological Processes*, 10, 1209–1227.
- Pan, T.C., Kao, J.J., 2009. GA-QP model to optimize sewer system design, *ASCE Journal of Environmental Engineering*, 135(1), 17-24.
- Peng, Wen-xiang & Jia, Rong, *Improved Genetic Algorithms for Optimal Design of Drainage Systems*, 8th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision Kunmin, China, 6-9 Dicembre 2004
- Ponce VM, Simons DB. *Shallow wave propagation in open channel flow*. J Hydraul Div ASCE 1977;103:1461–76.
- Ponce, V.M., Li, R.M. e Simons, D.B. Applicability of kinematic and diffusion models, Journal of Hydraulic Division, 1978, 104(3), pp. 353-360.
- Ponce, V. M. 1986. “Diffusion Wave Modeling of Catchment Dynamics,” *Journal of Hydraulics Division*, American Society of Civil Engineers, Vol 112, No.8.
- Prabhata K. Swamee, *Design of Sewer Line*, Journal of the Environmental Engineering, September 2001, vol. 127, No. 9, pagg. 776-781.
- Puppini, U. Il calcolo dei canali di bonifica, *Monitore Tecnico*, 1923.
- Robinson D.K. e Labadie J.W., *Optimal design of urban storm water drainage system*, In Proceedings of the International Symposium on Urban Hydrology, Hydraulics, and Sediment Control, Lexington, Ky., edited by D.J. Wood. OES Publications, College of Engineering, University of Kentucky, Lexington, Ky., 25-28 July 1981, pp. 145-156.

- Savic D.A. e Walters G.A., *Genetic algorithms for least-cost design of water distribution networks*, Journal of Water Planning and Management, 1997, 123 (2), pp. 67-72.
- Supino, G. *Le Reti Idrauliche*, Casa Editrice Prof. Riccardo Pàtron, Bologna, 1965, pp. 227-231.
- Simpson A.R., Dandy G.C. e Murphy L.J., *Genetic algorithms compared to other techniques for pipe optimization*, ASCE Journal of Water Resources Planning and Management, 1994, 120(4), pp. 423-443.
- Singh VP. *Accuracy of kinematic wave and diffusion wave approximations for space-independent flows*. Hydrol Process 1994;8:45–62.
- Singh VP. *Accuracy of kinematic wave and diffusion wave approximations for time-independent flows*. Hydrol Process 1995;9:755–82.
- Singh VP. *Kinematic wave modeling in water resources: surfacewater hydrology*. New York: John Wiley & Sons Ltd.; 1996.
- Società del canal de Provence et d'aménagement de la Région Provençale (1984) *Ecoulements transitoires à Surface Libre: Modèle d'Hayami*.
- Tang, W.H., Mays, L.W. & Yen B.C. *Optimal risk-based design of storm sewer network*, Journal of the Environmental Engineering Division, 1975, 101(EE3), 381-398.
- The United States Environmental Protection Agency, *Storm Water Management Model*, 1971.
- Todini, E. & Bossi, A. PAB (Parabolic and Backwater) An Unconditionally Stable Flood Routine Scheme Particularly Suited for Real Time Forecasting and Control, Journal of Hydraulic Research, Vol. 24, 1986, No. 5.
- Toro, E.F. (2001). *Shock-capturing methods for free-surface shallow flows*. Wiley, Chichester, UK.
- Trajkovic, B., Ivetic, M., Calomino, F., D'Ippolito, A. (1999). *Investigation of transition from free surface to pressurized flow in a circular pipe*. Water Sci. Technol. 39(9), 105–112.
- USDA - U.S. Department Of Agriculture, 1977. *Design of Open Channels*, Soil Conservation Service, Technical Release No. 25, Washington (USA).

- Wallingford Software Ltd, Hydroworks on-line documentation, HR-Wallingford, UK, 1995.
- Wallingford Software Ltd, InfoWorks CS, UK, 1998.
- Walters, G.A. & Templeman, A.B. Non-optimal dynamic programming algorithms in the design of minimum cost drainage systems, *Engineering Optimization*, 1979, 4(3), 139-148.
- Wilson, A.J., Britch, A.L. & Templeman, A.B. *The optimal design of drainage systems*, *Engineering Optimization*, 1974, 1(2), 111-123
- Weng H.T., Liaw S.L., *An Optimization Model for Urban Sewer System Hydraulic Design*, *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 2007, vol. 30, No. 1, pp. 31-42.
- Weng H.T., Liaw S.L., Huang W.C., *Establishing an Optimization Model for Sewer System Layout with Applied Genetic Algorithm*, *Environmental Informatics Archives*, 2004, vol. 2, pp. 781-790.
- World Bank, *SEWER design package*, World Bank, New York, 1991.
- U.S. Dept. Of Agriculture, *Design of Open Channels, Soil Conservation Service*, Technical Release, 1977 No. 25, Washington.
- Yeh C.H. e Labadie J.W., *Multiobjective watershed level planning of storm-water detention systems*, *Journal of Water Resources Planning and Management*, 1997, 123(6), pp. 336-343.
- Yen, B.C. (1991). Hydraulic resistance in open channels. Channel flow resistance: Centennial of Manning's formula. Water Resources Publications, Littleton CO, USA, 1-135.

